Алгебра. Второй курс. Семинар 5

Задача 1. Допустим, что K содержит ровно n корней из 1 степени n. Докажите, что любое расширение Галуа $L \supset K$, с группой Галуа изоморфной $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, имеет вид $L = K(\sqrt[n]{a})$, для некоторого $a \in K$. (Пусть σ - образующая группы Галуа, а ϵ - примитивный корень из 1 степени n. Докажите, что существует элемент $0 \neq \alpha \in L$ такой, что $\sigma(\alpha) = \epsilon\alpha$.)

Задача 2. Пусть K - поле характеристики 0, а $f(x) \in K[x]$ - неприводимый полином. На лекции было доказано, что если уравнение $f(x) = 0$ разрешимо в радикалах, то группа Галуа поля разложения $f(x)$ разрешима. Докажите обратное утверждение: если группа Галуа поля разложения $f(x)$ разрешима, то уравнение $f(x) = 0$ разрешимо в радикалах.

Задача 3. Пусть $L \supset K$ - произвольное расширение полей. Множество элементов $u_1, u_2, \cdots, u_n \in L$ называется базисом трансцендентности L над K, если $u_1, u_2, \cdots, u_n$ алгебраически независимы над K и L является алгебраическим расширением поля $K(u_1, u_2, \cdots, u_n)$.
(а) Пусть $u_1, u_2, \cdots, u_n$ - базис трансцендентности L над K, а $v \in L$ - элемент, трансцендентный над $K(u_2, u_3, \cdots, u_n)$. Докажите, что
$v, u_2, \cdots, u_n$ - также базис трансцендентности.
(б) Докажите, что все базисы трансцендентности L над K (если они существуют) содержат одно и то же число элементов.

Задача 4. Пусть $K = F(u_0, u_1 \cdots, u_{n-1})$ - поле рациональных функций над некоторым полем F. Докажите, что группа Галуа поля разложения многочлена $f(x) = x^n + u_{n-1}x^{n-1} + \cdots + u_0 \in K[x]$ изоморфна S_n. В частности, при $n > 4$, общее уравнение степени n неразрешимо в радикалах.

Задача 5. Пусть L - поле разложения многочлена $f(x) \in K[x]$ из задачи 4, а $\alpha_i \in L$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, - корни многочлена $f(x)$ в поле L. Докажите, что при любом $n > 1$ существует единственное подрасширение $L \supset F \supset K$ такое, что $[F : K] = 2$. Более того, $F = K(\sqrt{D})$, где D - дискриминант многочлена $f(x)$:

$$D = \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Задача 6. (а) Докажите, что дискриминант многочлена $f(x) = x^3 + px + q$ равен $-4p^3 - 27q^2$.
(б) Существует ли нормальное расширение $\mathbb{Q} \subset F \subset \mathbb{R}$ такое, что $Gal(F/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?