Комбинаторика

Листок считается сданным, если решено не менее восьми задач. Каждый пункт учитывается как отдельная задача. Каждая задача, помеченная звёздочкой, учитываются как две.

Задача 1. Найдите максимальный коэффициент, возникающий после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в $(a+b+c)^5$.

Задача 2. Сколькими способами можно разбить 14 человек на пары?

Задача 3. Сколько диаграмм Юнга[1] можно уместить в прямоугольнике $m \times n$ так, чтобы диаграмма и прямоугольник имели общий левый верхний угол?

Задача 4. Есть 4 попарно отличающиеся друг от друга чашки, 4 неразличимых стакана, 10 одинаковых кусков сахара и 7 попарно разноцветных соломинок. Сколькими способами можно разложить **а)** соломинки по чашкам **б)** сахар по чашкам **в)** сахар по стаканам **г*)** соломинки по стаканам.

Задача 5. Дайте чисто комбинаторные доказательства соотношений

а) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{2n}{n}$ **б)** $\displaystyle\sum_{r=0}^{n}\binom{n-r-1}{k-r}=\binom{n}{k}$.

Задача 6. Сколько имеется **а)** возрастающих **б)** неубывающих **в)** инъективных **г)** сюрьективных неубывающих **д*)** сюрьективных отображений $N \to M$ между линейно упорядоченными множествами из n и m элементов?

Задача 7. Сколько в первом миллионе натуральных чисел таких, которые не являются ни квадратом, ни кубом, ни четвертой степенью целого числа?

Задача 8. Три фигуры площади 1 каждая лежат внутри фигуры площади 2. Найдите минимальное значение наибольшей из площадей попарных пересечений этих трёх фигур.

Задача 9. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, где $\alpha_i, p_i \in \mathbb{N}$ и все p_i просты и попарно различны. Найдите **а)** количество всех свободных от квадратов[2] делителей **б*)** сумму всех делителей числа n.

Задача 10 (числа Каталана).

а) Установите явные биекции между следующими множествами:

(1) неубывающие пути, ведущие по линиям клетчатой бумаги из точки $(0,0)$ в точку (n,n) и лежащие не выше прямой $y=x$

(2) допустимые расстановки n пар скобок в произведении $a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$, позволяющие выполнить все n умножений последовательно

(3) бинарные корневые деревья с $n+1$ листьями[3]

(4) триангуляции выпуклого $(n+2)$-угольника не пересекающимися нигде кроме вершин диагоналями.

б*) Выразите число[4] элементов в них через подходящий биномиальный коэффициент.

[1] С учётом пустой диаграммы.

[2] Т. е. не делящихся на отличные от единицы квадраты натуральных чисел.

[3] Т. е. связными графами без циклов с $n+2$ вершинами валентности 1, одна из которых отмечена, и всеми остальными вершинами валентности 3.

[4] Оно называется n-тым *числом Каталана* и обозначается c_n.

Персональный табель ____ . **Листок № 4 (27.IX.2018)**

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4а			
б			
в			
г			
5а			
б			
6а			
б			
в			
г			
д			
7			
8			
9а			
б			
10а			
б			