Семинар № 4

Задача 1. Сколько существует различных

а) диагоналей в выпуклом n-угольнике

б) треугольников с вершинами в n данных точках общего положения

в) последовательностей длины n из нулей и единиц

г) отображений из n-элементного множества в m-элементное

д) n-элементных подмножеств в m-элементном множестве

е) неубывающих путей, ведущих по линиям клетчатой бумаги из точки $(0,0)$ в точку (n,m)

ж) пятизначных чисел, цифры которых строго убывают слева направо

з) укладываний семи неразличимых пластиковых стаканчиков в не более, чем 4 стопки[1]

и) разбиений n-элементного множества на непересекающиеся подмножества, m_i из которых состоят из i элементов[2]

к) мономов степени ровно m от n переменных

л) мономов степени не выше m от n переменных

м) делителей числа $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, \dots, p_k$ — попарно различные простые

н) слов[3], возникающих при перестановке букв в словах:

(1) шнурок (2) курок (3) колобок (4) $\underbrace{\text{б}_1 \dots \text{б}_1}_{\beta_1} \underbrace{\text{б}_2 \dots \text{б}_2}_{\beta_2} \dots \underbrace{\text{б}_m \dots \text{б}_m}_{\beta_m}$?

Задача 2. Найдите коэффициент при $x^k y^l z^m$ в многочлене $(x+y+z)^n$. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые у $(a+b+c)^3$.

Задача 3. Докажите тождества а) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ б) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ в) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ чисто комбинаторно и при помощи разложения бинома $(x+y)^n$.

Задача 4. Вычислите а) $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{m+i}{i}$ б) $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{m+i}{m}$ в) сумму всех чисел треугольника Паскаля, заполняющих параллелограмм с противоположными вершинами в $\binom{0}{0}$, $\binom{n}{k}$ и сторонами, параллельными сторонам треугольника.

Задача 5. Каждый старшекурсник матфака любит АлГем или УрЧП. Сколько на матфаке старшекурсников, если АлГем любят 179 человек, УрЧП — 91, а и то, и другое — 57?

Задача 6*. Когда комплексный обед в столовой матфака подешевел до 100 руб, на раздаче собралось $2n$ человек, половина из которых имела только банкноту в 100 руб, другая половина — только банкноту в 200 руб, а в кассе не осталось сдачи. Сколькими способами можно выстроить очередь так, чтобы никому не пришлось ждать сдачу?

---

[1]Укладывания, различающиеся лишь расположением стопок на столе, считаются одинаковыми.

[2]Целые неотрицательные числа $m_1, m_2, \dots, m_n$ с $\sum\limits_{i=1}^{n} i \cdot m_i = n$ заданы.

[3]Не обязательно осмысленных.