Дискретная математика I 2018, матфак ВШЭ

Семинар $5\frac{1}{2}$. Теория чисел

Задача 1. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на 0001?

Задача 2. Доказать, что если целое число n взаимно просто с 10, то 101-я степень числа n оканчивается теми же тремя цифрами, что и n (так, например, 1233^{101} оканчивается цифрами 233, а 37101 – цифрами 037).

Задача 3. Пусть p – нечётное простое число. Докажите, что любой простой делитель числа $2^p - 1$ имеет вид $2kp + 1$.

Задача 4. Геометрическое доказательство малой теоремы Ферма. Пусть $p > 2$ – простое число. Сколько существует способов раскрасить вершины правильного p-угольника в a цветов? (Раскраски, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми.) Получите формулу и выведите из нее малую теорему Ферма.

Задача 5. Пусть p — простое число и $p > 5$. Докажите, что если разрешимо сравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 (mod\, p)$, то $p \equiv 1 (mod\, 5)$. Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел вида $5n + 1$.

Задача 6. Для каких n возможны равенства: а) $\varphi(n) = n - 1$; б) $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$?

Задача 7. Тождество Гаусса. Докажите равенство

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Суммирование идет по всем делителям числа n.

Задача 8. * Найти все целые числа n, делящиеся на все целые числа, не превосходящие $\sqrt{n}$.