Семинар 6.

Задача 1. Диагонализируем ли линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^3$, заданный в стандартном базисе матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$? Если да, то найдите базис, в котором его матрица диагонализируется, и укажите матрицу перехода от стандартного базиса к этому базису.

Задача 2. *Аннулятором подпространства W векторного пространства V* называется подпространство $\mathrm{Ann}W$ двойственного к V пространства $V^\vee$, определяемое как $\{f \in V^\vee \,|\, f(w) = 0 \ \forall w \in W\}$. Пусть U и W - подпространства векторного пространства V. Докажите, что:
а) если $U \subset W$, то $\mathrm{Ann}W \subset \mathrm{Ann}U$;
б) $\mathrm{Ann}U + \mathrm{Ann}W \subset \mathrm{Ann}(U \cap W)$, $\ \mathrm{Ann}U \cap \mathrm{Ann}W \subset \mathrm{Ann}(U + W)$.

Задача 3. В условиях задачи 2 докажите, что если V конечномерно, то:
а) $\dim \mathrm{Ann}(W) = \dim V - \dim W$;
б) включения в задаче 2.б становятся равенствами;
в) при естественном изоморфизме пространства V с пространством $(V^\vee)^\vee$, построенном в лекциях, верно равенство $W = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(W))$.

Задача 4. На пространстве многочленов $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ для каждого $a \in \mathbb{R}$ рассмотрим линейный функционал $L_a : \ f \mapsto f(a)$.
а) Образуют ли линейные функционалы L_0, L_1, L_2, L_3 базис пространства $V^\vee$?
б) Если да, то укажите двойственный к нему базис в V.

Задача 5. Пусть L - k-мерное подпространство в векторном пространстве V. *k-мерной плоскостью с направляющим подпространством L* называется множество векторов $P = x + L := \{y = x + v \mid v \in L\}$, $x \in V$. Докажите, что:
а) если два вектора лежат в k-мерной плоскости, то их разность лежит в ее направляющем пространстве;
б) если $x_1 - x_2 \in L$, то плоскости $x_1 + L$ и $x_2 + L$ совпадают;
в) две плоскости $P_1 = x_1 + L_1$ и $P_2 = x_2 + L_2$ тогда и только тогда пересекаются, когда $x_1 - x_2 \in L_1 + L_2$.

Задача 6. Докажите, что если пересечение двух плоскостей $P_1 = x_1 + L_1$ и $P_2 = x_2 + L_2$ непусто, то оно является плоскостью с направляющим подпространством $L_1 \cap L_2$.

Задача 7. В пространстве $\mathbb{R}^5$ дана плоскость $v = x + t_1 e_1 + t_2 e_2$, где $x = (2, 3, -1, 1, 1)$, $e_1 = (3, -1, 1, -1, 1)$, $e_2 = (-1, 1, 1, 1, -1)$. Принадлежит ли этой плоскости вектор $y = (1, 6, 4, 4, -2)$?

Задача 8. Вычислите определитель

а) $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \frac{x+z}{2} & \frac{x+y}{2} & \frac{y+z}{2} & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ & & & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

Задача 9. Вычислите определитель Вандермонда $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ & & \dots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

Задача 10. Пусть U - подпространство векторного пространства V над полем $\mathbf{k}$. Для произвольного $v \in V$ рассмотрим *класс $v + U$ вектора v* по модулю подпространства U, определяемый по правилу $v + U := \{w \in V \mid w - v \in U\}$. Обозначим через V/U множество таких классов и введем на нем операции сложения и умножения на скаляры по правилам: $(v + U) + (w + U) := (v + w) + U$, $\lambda(v + U) := \lambda v + U$, $\ v, w \in V$, $\ \lambda \in \mathbf{k}$.
а) Докажите, что множество V/U с этими операциями является векторным пространством. (Оно называется *факторпространством пространства V по подпространству U*.)
б) Для произвольного линейного отображения $f : V \to W$ постройте не зависящий от выбора базисов в V и W изоморфизм векторных пространств $V/\ker(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(f)$.