Дискретная математика I 2018, матфак ВШЭ

Семинар $6\frac{1}{2}$ (факультатив). Обращение Мёбиуса.

Задача 1. a) Найдите обратную матрицу к матрице $A = (a_{ij})$ с $a_{ij} = 1$ при $i \le j$ и $a_{ij} = 0$ при $i > j$.

b) Напишите явное выражение для элемента[1] b_{ij} матрицы B, обратной к произвольной верхнетреугольной матрице с единицами на главной диагонали.

Рассмотрим частично упорядоченное множество P с отношением $\le$ и условием локальной конечности: $\forall\, p \in P$ начальный отрезок $\langle p] := \{x \in P \mid x \le p\}$ конечен. Обозначим через $A(P)$ множество всех таких функций $f\colon P \times P \to \mathbb{C}$, что $f(x, y) \ne 0 \Rightarrow x \le y$.

Задача 2. Убедитесь, что

a) множество $\mathbb{N}$ с отношением $n \mid m$ и множество всех конечных подмножеств произвольно заданного множества M с отношением $X \subseteq Y$ являются локально конечными частично упорядоченными множествами;

b) *свёртка* $f_1 \star f_2\colon (x, y) \mapsto \sum\limits_{x \le z \le y} f_1(x, z) f_2(z, y)$ и сумма $f_1 + f_2\colon (x, y) \mapsto f_1(x, y) + f_2(x, y)$ функций задают на $A(P)$ структуру ассоциативного (но не коммутативного) кольца с единицей;

c) $f \in A(P)$ обратим относительно свёртки если только $f(x, x) \ne 0$ для всех $x \in P$.

Элемент $\mu(x, y) \in A(P)$, обратный к функции $\zeta(x, y)$, равной 1 при $x \le y$ и нулю в остальных случаях, называется *функцией Мёбиуса* локально конечного частично упорядоченного множества P.

Задача 3. Проверьте следующие свойства функции Мёбиуса:

$$\mu(x, x) = 1, \qquad \mu(x, y) = -\sum_{x \le z < y} \mu(x, z) = -\sum_{x < z \le y} \mu(z, y).$$

Задача 4. a) По всякой функции $f(x, y) \in A(P)$ построим функции $\sigma_1(x, y) \coloneqq \sum_{z : x \le z \le y} f(z, y)$ и $\sigma_2(x, y) \coloneqq \sum_{z : x \le z \le y} f(x, z)$. Тогда

$$f(x, y) = \sum_{z : x \le z \le y} \mu(x, z) \sigma_1(z, y) = \sum_{z : x \le z \le y} \sigma_2(x, y) \mu(y, z);$$

b) если для функции $g\colon P \to \mathbb{C}$ известны все суммы $\sigma_g(x) = \sum\limits_{y \le x} g(y)$, то функция g восстанавливается из них по *формуле Мёбиуса*[2]: $g(x) = \sum\limits_{y \le x} \sigma_g(y) \cdot \mu(y, x)$.

Задача 5. a) Изобразите графы (элементы точками, отношения стрелочками) следующих упорядоченных множеств:

линейно упорядоченного множества из n элементов;

множеств 2^M при $|M| = 2$ и $|M| = 3$ относительно включения $\subseteq$;

то же для отношения $\supseteq$;

множества последовательностей длины 3 из нулей и единиц, в котором $\bar\alpha \le \bar\beta$ означает $\alpha_k \le \beta_k$ для всех $k = 1, 2, 3$;

множества натуральных чисел от 1 до 6 с отношением делимости.

---

[1] При маленьких i, j оно имеет вид: $b_{12} = -a_{12}$, $b_{13} = -a_{13} + a_{12}a_{23}$, $b_{14} = -a_{14} + a_{12}a_{24} + a_{13}a_{34} - a_{12}a_{23}a_{34}$, $b_{23} = -a_{23}$, $b_{24} = -a_{24} + a_{23}a_{34}$ и т. д.

[2] здесь можно дополнить упорядоченное множество P общим минимальным элементом $\varnothing$ и продолжить g до функции $\tilde g$ двух переменных так, что $\tilde g(\varnothing, x) = g(x)$

b) Вычислите функцию Мёбиуса для конечного линейно упорядоченного множества.
c) Вычислите функцию Мёбиуса для множества 2^M, где $|M| = m$.
d) Вычислите функцию Мёбиуса для множества $\mathbb{N}$ с отношением делимости (называется *арифметической* функцией Мёбиуса).

Пусть $A_1, A_2, \dots A_m \subset A$ – подмножества множества A такие, что $\cup_i A_i = A$; M – множество последовательностей нулей и единиц длины m. Построим функцию $f : M \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ по правилу: $f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = |A_1^{\alpha_1} \cap A_2^{\alpha_2} \cap \dots \cap A_m^{\alpha_m}|$, считая $A_i^1 = \overline{A_i}$, $A_i^0 = A_i$.

Задача 6. Вычислите для каждого набора α сумму $\sum_{\beta \leq \alpha} f(\beta)$. С помощью обращения Мёбиуса выведите формулу включения-исключения.

Функция Эйлера $\varphi(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, определяется как число натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним (т.е. $\varphi(1) = 1$).

Задача 7. a) Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ вычислите $\sum\limits_{d|n} \varphi(d)$.

b) Выведите мультипликативную формулу для функции Эйлера, используя обращение Мёбиуса.

Задача 8. Приведённый многочлен $\Phi_n \in \mathbb{C}[x]$, корнями которого являются все первообразные корни $\sqrt[n]{1} \in \mathbb{C}$ и только они, называется n-тым *круговым многочленом*. Найдите $\deg \Phi_n$. Покажите, что $x^n - 1 = \prod\limits_{d|n} \Phi_d(x)$ и $\Phi_n(x) = \prod\limits_{d|n} (x^{n\,/\,d} - 1)^{\mu(d)}$.

Задача 9. * Докажите, что в мультипликативной группе $\mathbb{F}_q^*$ конечного поля из q элементов порядок любого элемента делит $q - 1$, и для каждого $d \mid (q - 1)$ найдите число элементов порядка d. В частности, убедитесь, что в $\mathbb{F}_q^*$ есть элементы порядка[3] $(q - 1)$, и выясните, какова их степень над простым подполем $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_q$.

Задача 10. * Докажите в $\mathbb{Q}[[t]]$ равенство $(1 - pt)^{-1} = \prod\limits_{m \in \mathbb{N}} (1 - t^m)^{-i_m}$, где i_m – число неприводимых приведённых многочленов степени m в $\mathbb{F}_p[x]$.

Задача 11. * Верно ли, что в $\mathbb{F}_p[x]$ ровно $\frac{1}{n} \sum\limits_{d|n} p^d \mu(n\,/\,d)$ многочленов степени n неприводимы?

[3] Среди прочего, это означает, что группа $\mathbb{F}_q^*$ циклическая.