Семинар 5. Отношения

Бинарным отношением между множествами M и N называется подмножество $R \subset M \times N$. Элементы $m \in M$, $n \in N$ называются *R-сравнимыми*, если $(m,n) \in R$, что обычно обозначается как $m\,R\,n$. Бинарное отношение $R \subset M \times M$ называется *отношением на M*. Такое отношение называется *рефлексивным*, если $x\,R\,x$ для всех $x \in M$, *транзитивным*, если для всех $x, y, z \in M$ из $x\,R\,y$ и $y\,R\,z$ следует, что $x\,R\,z$, *симметричным*, если $x\,R\,y \iff y\,R\,x$, и *антисимметричным*, если $x\,R\,y$ и $y\,R\,x$ только при $x = y$. Рефлексивное, транзитивное и симметричное (соотв. антисимметричное) бинарное отношение на M называется *эквивалентностью* (соотв. *частичным порядком*).

Задача 1. Обладают ли перечисленные ниже отношения свойствами рефлексивности, транзитивности, (анти)симметричности, эквивалентности или частичного порядка:

a) $x \leq y$ (x не больше y) на множестве $\mathbb{Q}$
b) «x не раньше[1] y» на единичной окружности;
c) «A не проиграл B» на множестве шахматистов, проведших однокруговой турнир[2];
d) $x \equiv y \mod \mathbb{Z}$, т.е., $x - y \in \mathbb{Z}$, на множестве $\mathbb{Q}$;
e) $x \mid y$, т.е., x делит y, на множестве $\mathbb{Z}$;
f) $x \equiv y \mod n$, т.е., $x - y$ кратно n, на множестве $\mathbb{Z}$;
g) $X \subseteq Y$ (включение) на множестве всех подмножеств множества M;
h) $X \simeq Y$ (наличие биекции $X \to Y$) на множестве всех подмножеств множества M;
i) $\ell_1 || \ell_2$ (параллельность) на множестве прямых на плоскости;
j) $\ell_1 \perp \ell_2$ (перпендикулярность) на множестве прямых на плоскости;
k) пропорциональность[3] над полем $\mathbb{R}$ на множестве ненулевых векторов в $\mathbb{R}^2$;
l) пропорциональность над кольцом $\mathbb{Z}$ на множестве ненулевых векторов в $\mathbb{Z}^2$;
m) линейная зависимость над кольцом $\mathbb{Z}$ на множестве ненулевых векторов в $\mathbb{Z}^2$.

Задача 2. Пусть $f : M \to N$ – отображение множеств. Оно определяет отношение $\Gamma_f = \{(m,n) \in M \times N | n = f(m)\}$ (график функции). Опишите свойства, выделяющие графики функций среди других отношений.

Композицией отношений $R_1 \in M \times N$ и $R_2 \in N \times P$ называется отношение $R_1 \circ R_2 \in M \times P$ такое, что $(x,y) \in R_1 \circ R_2$, если $\exists z \in N$ такое, что $(x,z) \in R_1$ и $(z,y) \in R_2$.

Задача 3. a) Пусть Γ_f и Γ_g - графики отображений $f : M \to N$ и $g : N \to P$. Тогда $\Gamma_f \circ \Gamma_g = \Gamma_{f \circ g}$.
b) Опишите композиции $R_1 \circ R_2$ и $R_2 \circ R_1$, где $R_1 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y), x = 2\cos y\}$, $R_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y), x = \dfrac{\sin y}{3}\}$.
c) Пусть $R \in M \times M$ – отношение эквивалентности. Тогда $R \circ R = R$.

Задача 4. Есть ли ошибка в следующем рассуждении?

[1] кратчайший путь из x в y идёт против часовой стрелки.
[2] Это означает, что каждый сыграл с каждым ровно по одному разу.
[3] Вектор w пропорционален вектору u над $\mathbb{R}$, если $w = \lambda u$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Докажем, что всякое симметричное и транзитивное бинарное отношение R на множестве X является рефлексивным, то есть, xRx для каждого $x \in X$. Возьмём такой $y \in X$, что xRy. Тогда из симметричности имеем yRx. Теперь из транзитивности, применённой к тройке элементов (x, y, x), следует, что xRx, что и требовалось доказать.

Задача 5. a) Покажите, что любое отношение эквивалентности S на множестве M разбивает его на непересекающиеся классы эквивалентности.

b) Всякое отношение эквивалентности S на множестве M описывается сюрьективным отображением f_S множества M в другое множество $\bar{M}$: $(m_1, m_2) \in S$ если $f(m_1) = f(m_2)$. Множество $\bar{M}$ может быть отождествлено с множеством классов эквивалентностей S и названо фактормножеством M/S множества M по отношению S.

Задача 6. Покажите, что следующие отношения на множестве M являются отношениями эквивалентности. Опишите классы эквивалентности.

a) $M = \mathbb{Z}$, $x \sim y$, если $x - y$ делится на 3
b) см. пункт (h) задачи 1
c) $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $(m, n) \sim (p, q)$ если $mq = pn$

Задача 7. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел определяется как множество классов эквивалентности, описанных в задаче 6 (c).

a) Объясните, почему правило $(m, n)+(p, q) = (mq+np, nq)$ корректно определяет операцию сложения в $\mathbb{Q}$;
b) объясните, почему покоординатное сложение не может определить никакую операцию в $\mathbb{Q}$.

Следующий цикл задач факультативен и может быть также разобран в последнем (седьмом) семинаре курса

Задача 8. Покажите, что:

a) пересечение эквивалентностей является эквивалентностью
b) для любого отношения $R \subset M \times M$ существует единственная наименьшая по включению эквивалентность $\bar{R} \supseteq R$ (она называется *эквивалентностью, порождённой отношением* R).
c) $x\,\bar{R}\,y$, если и только если $x = y$ или в M найдётся конечная цепочка элементов $x = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}, z_k = y$, в которой $z_i\,R\,z_{i-1}$ или $z_{i-1}\,R\,z_i$ при всех $1 \le i \le k$.

Задача 9. a) Опишите эквивалентность, порождённую отношением из зад.1 м), и фактормножество по этой эквивалентности.

b) Всякий граф задает задает следующее отношение Γ на множестве своих вершин: $(v_1, v_2) \in \Gamma$, если v_1 и v_2 соединены ребром. Опишите эквивалентность, порожденную этим отношением, и соответствующее фактормножество по этой эквивалентности.

Задача 10. Более естественным подходом к определению рациональных чисел является рассмотрение дробей $\dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, с учетом равенств $\dfrac{p}{q} = \dfrac{np}{nq}$ для всякого $n \in \mathbb{N}$, т.е. множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ с отношением, состоящим из пар $((p, q), (pn, qn)) \in S$. Объясните переход к использованному ранее определению.

Домашнее задание к семинару 5

Все задания сдаются письменно.

Задача 1. a) Пусть $R \in M \times M$ транзитивно. Тогда $R \circ R \subseteq R$. Приведите пример строгого включения;

b) Пусть $\sharp M = m$. Сколько всего отношений на множестве M?

Задача 2. Введём на упорядоченных парах целых чисел (m, n) такое отношение эквивалентности:

$$(m, n) \sim (k, l) \text{ тогда и только тогда, когда } m + n - k - l \text{ делится на } 3\ .$$

a) Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности, то есть оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

b) На клетчатой бумаге нарисуйте все такие точки с координатами (m, n), что (m, n) и $(0, 0)$ лежат в одном и том же классе эквивалентности, и при этом где $0 \leq m, n \leq 10$. Можно ли на этом рисунке отобразить все классы эквивалентности? Найдите число классов эквивалентности.

Задача 3. На множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел введем отношение эквивалентности $x \sim y$, если $x - y \in \mathbb{Z}$. Обозначим соответствующее фактормножество $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Отождествите (постройте взаимно однозначное соответствие) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с окружностью $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Отождествите функции на S^1 с периодическими функциями на $\mathbb{R}$.

Листок 5

Листок засчитывается, если решено 7 задач из него. Каждый пункт считается отдельно.

Задача 1. Будем говорить, что одна прямоугольная коробка меньше другой, если одно из трех измерений первой коробки меньше одного из трех измерений второй коробки. Транзитивно ли это отношение?

Задача 2. Пусть M и N - два конечных множества. Скажем, что два отображения $f : M \to N$ и $g : M \to N$ связаны отношением S , если существуют биекции $u : M \to M$ и $v : N \to N$ такие, что $fu = vg$. Покажите, что это отношение эквивалентности на множестве отображений M в N. Опишите классы эквивалентностей. Тот же вопрос для множества инъективных отображений.

Задача 3. Вычислите композицию $R_1 \circ R_2$ отношений $R_1, R_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, где $R_1 = \{x, y : x = \dfrac{y}{y^3+1}\}$, $R_2 = \{y, z : z = \dfrac{y^2}{y^3+1}\}$. Нарисуйте соответствующее множество на плоскости (x, z). Можно ли его задать одним уравнением?

Задача 4. Пусть T - множество треугольников на плоскости. Рассмотрим на T следующие отношения:
a) $T_1 \sim_a T_2$, если T_2 можно получить из T_1 параллельным переносом;
b) $T_1 \sim_b T_2$, если T_2 можно получить из T_1 движением;
c) $T_1 \sim_c T_2$, если T_2 можно получить из T_1 собственным движением (т.е., движением, не меняющем ориентацию плоскости;
d) $T_1 \sim_d T_2$, если T_2 можно получить из T_1 аффинным преобразованием, т.е., отображением плоскости в себя, переводящим прямые в прямые.
Покажите, что все эти отношения являются отношениями эквивалентности. Опишите явно соответствующие фактормножества. Чем можно параметризовать элементы этих фактормножеств?

Задача 5. Рассмотрим множество A векторов $\overrightarrow{AB}$ на плоскости. Векторы можно складывать, если конец первого совпадает с началом второго: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Введем отношение эквивалентности: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, если существует параллельный перенос плоскости, переводящий A в C и B в D. Покажите, что операция сложения векторов определяет операцию на фактор множестве $A/\sim$, отождествляя его с двумерным линейным пространством.

Задача 6. Каким условиям должны удовлетворять эквивалентность $\sim$ и частичный порядок $\leq$ на множестве M, чтобы отношение $x \leq y$ корректно задавало порядок на факторе $M/_\sim$? Индуцирует ли естественный порядок на $\mathbb{Z}$ какой-нибудь порядок на $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ или на $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$)?

Задача 7. Частичный порядок называется *линейным* (или просто *порядком*), если любые два элемента сравнимы. Покажите, что всякий частичный порядок на конечном множестве может быть расширен до линейного порядка.

Задача 8. По заданному линейному порядку на M постройте линейный порядок на множестве $M^n = M \times M \times \ldots \times M$, обобщающий конструкцию, которая по стандартно упорядоченным буквам русского алфавита создаёт линейный порядок на множестве всех слов [4]. Для порядка на плоскости $\mathbb{R}^2$, получающегося таким образом из стандартного порядка на $\mathbb{R}$, нарисуйте множество всех таких точек $p \in \mathbb{R}^2$, что $(1, 2) \leq p \leq (2, 1)$.

[4] т.е. лексикографичеси упорядочивает слова по алфавиту