

Бурман Юрий Михайлович

burman@mcsmc.ru

1 Инверсии и спуски.

1.1 Теорема Мак-Магона

Тема рекомендована студентам 1 курса.

Количество перестановок с k инверсиями равно количеству перестановок с общим спуском k .

1.2 Теорема Шютценберже

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Количество перестановок с k инверсиями и общим спуском ℓ зависит от k и ℓ симметрично.

2 Тожество Роджерса–Рамануджана.

Тема рекомендована студентам 1 курса.

Количество представлений натурального числа в виде суммы целых положительных слагаемых, среди которых нет соседних чисел, равно количеству представлений того же числа в виде суммы слагаемых, дающих при делении на 5 остаток 1 или 4. Пример: $6 = 5 + 1 = 4 + 2$ — три представления, и $6 = 4 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ — тоже три представления.

3 Теорема Бриона и двойственность Эрхарда–Макдональда.

3.1 Классический результат

Тема рекомендована студентам 2 курса.

Количество точек с целыми координатами, лежащих в растянутом в $k = 1, 2, \dots$ раз выпуклом многограннике с целочисленными вершинами, задается значением $P(k)$ определенного многочлена P (зависящего от многогранника). Значение $P(-k)$ того же многочлена равно, с точностью до знака, количеству точек с целыми координатами, лежащих *внутри* этого многогранника. Доказательство этого факта использует суммирование всюду расходящихся геометрических прогрессий.

3.2 Исследовательская часть

Тема рекомендована студентам 2–3 курсов.

Попытаться получить обобщение этой теоремы, в котором вершины многогранника не обязательно имеют целые координаты.

4 Матричная теорема о деревьях.

4.1 Теорема Кирхгофа

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Матрица Лапласа — матрица $n \times n$, на (i, j) -ом месте которой при $j \neq i$ стоит переменная w_{ij} , а при $j = i$ (на диагонали) — выражение $-\sum_{k \neq i} w_{ik}$. Теорема утверждает, что диагональный минор $(n - 1) \times (n - 1)$ матрицы Лапласа равен сумме всех “древовидных” мономов от w_{ij} . Теорема имеет несколько непохожих друг на друга доказательств (так что в принципе по этой теме возможно несколько курсовых работ), а также ряд обобщений (на недиагональные миноры миноры меньшего размера, на другие системы корней и т.п.).

4.2 Следствия

Тема рекомендована студентам 2 курса.

Теорема о полуплоскости для электрических цепей, теория случайных блужданий, матричная теорема для высших перестановочных представлений симметрической группы.

5 Высшие детерминанты.

Тема рекомендована студентам 3–4 курсов.

Высшие аналоги матричной теоремы о деревьях. Дискретное интегрирование по путям. Бесконечномерные пределы (тут большинство результатов еще не получено).

6 $SO(3) = \mathbb{R}P^3$

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Существует несколько способов отождествить группу вращений трехмерного пространства (это и есть $SO(3)$) с трехмерным проективным пространством. Можно исследовать, во что переходят при этом отождествлении подмножества двух пространств, например, проективные прямые или множества поворотов вокруг заданной оси.

7 Срезанный куб окружности

Тема рекомендована студентам 2 курса.

Множество наборов из не более трех точек на окружности гомеоморфно трехмерной сфере. причем наборы, содержащие только одну точку, образуют в трехмерной сфере узел “трилистник”.