Листок 2. Многообразия (карты, атласы, ориентриуемость)
Гладкие многообразия

Крайний срок сдачи 19.10.2018

Задачи со звездочками можно сдавать и после дедлайна.

1. Можно ли на границе единичного квадрата ввести (а) структуру гладкого многообразия? (б) структуру подмногообразия $\mathbb{R}^2$?

2. Задайте на торе $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ гладкий атлас.

3. Введите на множестве всех прямых на плоскости структуру многообразия, так, чтобы оно было изоморфно листу Мёбиуса.

4. Покажите, что $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ как многообразие диффеоморфно полноторию.

5. Обозначим через $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n\times n}$ множество вещественных $n \times n$ матриц с нормой $|A|^2 = \sum_{i,j} |a_i^j|^2$.

(а) Покажите, что $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ является гладким многообразием, найдите его размерность. Является ли $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ подмногообразием $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$?

(б) Покажите, что $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ является гладким многообразием, найдите его размерность. Является ли $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ подмногообразием $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$?

(в) Покажите, что $N_n = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\}$, $n > 1$ не является гладким многообразием относительно стандартной топологии.

6. (а) Приведите пример неориентируемого многообразия с краем, край которого ориентируем.

(б) Постройте атлас $\mathbb{RP}^2$ и покажите, что оно неориентируемо.

(в) Постройте атласы $\mathbb{RP}^n$. При каких n многообразия они являются ориентируемыми, а при каких нет?

7. Выпишите явно карты, координаты и функции перехода на $\mathbb{CP}^n$.

8. Пусть (M, A) и $(\tilde{M}, \tilde{A})$ — многообразия с заданными на них гладкими $C^{(k)}$-структурами. Гладкие структуры (M, A) и $(\tilde{M}, \tilde{A})$ считаются *изоморфными*, если существует такое $C^{(k)}$-отображение $f : M \to \tilde{M}$, которое имеет обратное $f^{-1} : M \to \tilde{M}$ также $C^{(k)}$-отображение в атласах A, $\tilde{A}$.

(а) Покажите, что гладкая структура на $\mathbb{R}$, заданная картой $\varphi(x) = x$, изоморфна, но не равна, гладкой структуре на $\mathbb{R}$, заданной картой $\psi(x) = x^3$.

(б)* Покажите, что на $\mathbb{R}$ все структуры одинаковой гладкости изоморфны.

(в)* Покажите, что на окружности S^1 любые две $C^{(\infty)}$-структуры изоморфны.

(Отметим, что это свойство остается верным вплоть до сферы S^6, а на сфере S^7, напротив, существуют неэквивалентные $C^{(\infty)}$-структуры.)

9. * Выпишите явно карты, координаты и функции перехода на Грассманиане $Gr(2,4,\mathbb{R})$.