Листок 3. Движения пространства и векторное произведение.

Werde der du bist[1]. *J. W. Goethe*

1. Найдите все а) повороты, б) осевые симметрии, в) движения, переводящие в себя множество вершин квадрата на плоскости. г),д),е) То же для правильного треугольника на плоскости.

2. а) Найдите все параллельные переносы пространства, переводящие данный куб в себя.
б) То же для центральных симметрий.
в) То же для зеркальных симметрий.
г) То же для осевых симметрий.

Вращением пространства вокруг ориентированной прямой l на угол α называется отображение R_l^α пространства, которое каждую точку прямой l оставляет на месте и каждой точке X пространства, не лежащей на прямой l, ставит в соответствие точку X', определяемую так: берем проекцию O точки X на l, проводим плоскость XOX' ортогонально прямой l, так что $OX = OX'$ и угол XOX' в этой плоскости равен α (положительное направление отсчета углов в плоскости XOX' согласовано с ориентацией пространства и прямой l по правилу буравчика). *Поворотной симметрией* пространства называется композиция вращения и зеркальной симметрии относительно плоскости, перпендикулярной оси вращения (или, эквивалентно, композиция вращения и центральной симметрии относительно точки, лежащей на оси вращения).

3. а) Ось любого вращения пространства, переводящего данный куб в себя, проходит либо через вершину, либо через середину ребра, либо через центр грани.
б) Найдите все вращения пространства, переводящие данный куб в себя.
в) То же для поворотных симметрий.
г) То же для движений.

Для каждого типа движений нарисуйте куб и движение (приветствуются красивые цветные рисунки), укажите перестановку вершин куба, реализуемую этим движением, и число движений такого типа.

4. То же для правильного тетраэдра.

5. Постройте биекцию, сохраняющую композицию, между найденным в задачах 1, 3б, 3г, 4 множеством движений и некоторым подмножеством группы перестановок n-элементного множества (с минимально возможным числом n).

[1] Стань самим собой. — *Пер. с нем.*

6. Докажите:
а) *тождество 'бац минус цаб'*: $[\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A},\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A},\vec{B})$;
б) *тождество Якоби*: $[\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]] + [\vec{B},[\vec{C},\vec{A}]] + [\vec{C},[\vec{A},\vec{B}]] = 0$.

Последующие задачи посвящены доказательству следующей непростой теоремы:

Теорема Хьемслева–Морли. Пусть a, b и c — три попарно непараллельные прямые в пространстве. Обозначим через a' общий перпендикуляр к паре прямых b и c. Далее, обозначим через a'' общий перпендикуляр к паре прямых a и a' (дано, что эти прямые непараллельны). Аналогично определим прямые b'' и c''. Тогда a'', b'', c'' имеют один общий перпендикуляр (т.е. прямую, пересекающую их все и перпендикулярную им всем).

---

7. а) Докажите эту теорему в случае, когда a, b, c лежат в одной плоскости.
б) То же для случая, когда a, b, c проходят через одну точку.
в) Докажите, что a'', b'' и c'' параллельны одной плоскости (для любых a, b, c).

Прямую в пространстве можно задать следующим уравнением:

$$[u, x] = v.$$

Здесь u и v — фиксированные перпендикулярные друг другу векторы, а x — радиус-вектор переменной точки. Векторы u и v можно построить по данной прямой так: взять две точки A и B на этой прямой и положить $u = AB$, $v = [OA, OB]$.

Пусть $(u; v)$ и $(u'; v')$ — две пары векторов. Назовем их *произведением* пару $(u''; v'')$, где $u'' = [u, u']$ и $v'' = [u, v'] + [v, u']$. Определим *сумму* пар векторов покомпонентно: $(u; v) + (u'; v') = (u + u'; v + v')$. Паре $(u; v)$ поставим в соответствие прямую $[u, x] = pr\, v$, где $pr\, v$ — проекция вектора v на плоскость, перпендикулярную вектору u.

8. а) Прямые $[u, x] = v$ и $[u', x] = v'$ пересекаются (или параллельны), если и только если $(u, v') + (v, u') = 0$.
б) Наше соответствие переводит произведение в общий перпендикуляр, т.е. для любых двух пар векторов $(u; v)$ и $(u'; v')$, удовлетворяющих условию $[u, u'] \neq 0$, прямая $[u'', x] = pr\, v''$ — общий перпендикуляр к прямым $[u, x] = pr\, v$ и $[u', x] = pr\, v'$.

9. Произведение пар векторов удовлетворяет тождеству Якоби.

10. Докажите теорему Хъемслева–Морли.