

ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА 2018
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1

1. Найдите уравнения движения и определите вид траектории для лагранжиана

$$L = e^{-q^2 - \dot{q}^2} + 2\dot{q}e^{-q^2} \int_0^{\dot{q}} e^{-s^2} ds$$

2. Варьированием действия выведите уравнения движения и граничные условия для лагранжиана $L = \dot{q}^3 - q^4$

3. Найдите лагранжиан и законы сохранения для системы двух материальных точек с массами m_1, m_2 соединённых пружиной свободной длины l и жёсткости k двигающихся по прямой.

4. Точка массы m движется под действием силы тяжести в вертикальной плоскости по кривой $x = a(s - \sin s)$, $y = a(\cos s - 1)$, $0 \leq s \leq 2\pi$. Найдите лагранжиан, закон сохранения и решения уравнений движения для начальных данных $\mathbf{r}(0) = (\pi a, -2a)$, $|\mathbf{r}'(0)| = v_0$.

Указание: натуральный параметр кривой удобная координата для вычислений

5. Добавление к лагранжиану полной производной $L \mapsto \tilde{L} = L + \frac{dF(q,t)}{dt}$ не меняет уравнений движения. Опишите соответствующее изменение импульсов и гамильтониана, докажете эквивалентность новых уравнений гамильтона исходным.

6. Найдите производную Ли вдоль поля $X = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\partial_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\partial_y$ от поля $y\partial_x - x\partial_y$, формы $x dx + y dy$ и формы $dx \wedge dy$.

7. На многообразии M с локальными координатами q_1, \dots, q_n для векторных полей $Y = Y_1(q)\frac{\partial}{\partial q_1} + \dots + Y_n(q)$, $X = X_1(q)\frac{\partial}{\partial q_1} + \dots + X_n(q)$ и отображения потока X_t поля X за время t найдите первый порядок по t разложения поля

$$Y_1(X_t(q))\frac{\partial}{\partial(X_t(q))_1} + \dots + Y_n(X_t(q))\frac{\partial}{\partial(X_t(q))_n}$$

8. Найдите гамильтониан по лагранжиану

$$L = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 - \dot{q}_2 \cos q_1 + \sin q_2$$

9. Найдите лагранжиан по гамильтониану

$$H = \frac{6p_1^2 - p_1p_2 + 2p_2^2}{47} - 2q_1^2$$

10. Найдите законы сохранения для частицы двигающейся в однородном поле $U(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}$, в размерности n .