

ЛИСТОК 2

Задача 0. Тюрьма находится в начале координат, а дорога совпадает с осью ОХ, поле – вся плоскость вне оси ОХ. Из тюрьмы сбежал заключенный. Известно, что при движении по дороге его скорость равна 5 км/ч, а по полю – 2 км/ч. Через час его хватились. Укажите все возможные точки плоскости, в которых может находиться заключенный.

Задача 1. Пусть задано семейство кривых $f(x, y, C) = 0$ на плоскости. Гладкая кривая $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ называется огибающей этого семейства, если существует гладкая функция $C(t)$ такая, что на всяком промежутке $C(t)$ не является постоянной и для всякого t кривая γ в точке $\gamma(t)$ касается кривой $f(x, y, C(t)) = 0$. Докажите, что огибающая удовлетворяет системе уравнений:

$$f(x, y, C) = 0, \quad f_C(x, y, C) = 0.$$

Задача 2.

(i) Найдите огибающие семейства кривых

- (a) $C^2 + xC + y = 0$, (b) $C^3 + xC + y = 0$, (c) $(x - C)^2 + (y - C)^2 = 1$,
 (d) $\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{1-C^2} = 1$, $|C| < 1$.

(ii) Объясните как с помощью огибающих в пунктах (a) и (b) решить геометрически уравнения $t^2 + xt + y = 0$ и $t^3 + xt + y = 0$ относительно t .

(iii) Докажите, что огибающая семейства решений уравнения $F(x, y, y') = 0$ является особым решением уравнения, т. е. таким решением, которое в каждой своей точке касается некоторого другого решения и не совпадает с этим решением ни в какой окрестности точки касания.

Задача 3. Пусть функция $b(x, y)$ квазиоднородна степени n с весами α и β , то есть

$$b(e^{\alpha\tau}x, e^{\beta\tau}y) = e^{n\tau}b(x, y).$$

Докажите, что поле направлений уравнения $y' = b(x, y)$ на области

$$\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$$

инвариантно относительно группы преобразований $g^\tau(x, y) = (e^{\alpha\tau}x, e^{\beta\tau}y)$ тогда и только тогда, когда $n = \beta - \alpha$. Пусть теперь $n = \beta - \alpha$. Найдите замену, которая преобразует уравнение $y' = b(x, y)$ в уравнение с разделяющимися переменными. В каких координатах разделяются переменные в уравнении $y' = xy^2 + x^3y^3$?

Задача 4. Какие из следующих векторных полей на прямой можно перевести друг в друга диффеоморфизмом:

$$(2 \sin x)\partial_x, \quad (\sin^2 x)\partial_x, \quad (\sin 2x)\partial_x?$$

Задача 5. Найдите все векторные поля на плоскости, которые коммутируют с полем:

- (a) $\frac{\partial}{\partial x}$, (b) $2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$.