ЛИСТОК 3
Введение в алгебраическую геометрию - матфак ВШЭ
прием задач: 25.04.2013

Задачи могут частично повторять материалы лекций и семинаров (если прямым текстом требуется доказать какой-либо факт, который там упоминался, доказательство, конечно, нужно воспроизвести). Основное поле на всякий случай предполагается алгебраически замкнутым нулевой характеристики.

Можно пользоваться тем, что нормализация аффинного многообразия существует, то есть что существует конечный бирациональный морфизм (последнее означает, что поля рациональных функций совпадают) из нормального аффинного многообразия в данное.

1) Докажите, что любое многообразие содержит открытое аффинное нормальное многообразие.

2) Рассмотрим морфизм из аффинной прямой на нодальную кубику $y^2 = x^2(x-1)$. Найдите минимальный многочлен для какой-нибудь функции, разделяющей точки прообраза над точкой $(0,0)$. Что плохого происходит при редукции его коэффициентов по модулю максимального идеала точки $(0,0)$?

3) Рассмотрим отображение из $\mathbb{A}^2$ в $\mathbb{A}^4$, заданного формулой

$$(x,y) \to (x, xy, y(y-1), y^2(y-1)).$$

Найдите систему уравнений, определяющую образ. Покажите, что это конечный морфизм, докажите, что образ замкнут. Покажите, что это бирациональный морфизм. Исследуйте количество прообразов над каждой точкой. На каком множестве это изоморфизм?

4) Докажите нормальность квадратичного конуса по следующей схеме. Пусть $A = k[x_1, \dots, x_k, z]/(z^2 - f)$, где f-многочлен от $x_1, \dots, x_k$, $k \geq 2$, свободный от квадратов. Покажите, что A целозамкнуто в своем поле частных. Для этого напишите минимальный многочлен для $g + h\sqrt{f}$ (не забудьте показать, что любой элемент поля частных A представим в таком виде), где g, h рациональные функции от $x_1, \dots, x_k$. Что можно сказать о g, h, если все коэффициенты многочлена целые?

5) Покажите, что если рациональная функция на нормальном многообразии определена везде, кроме множества коразмерности 2, то это регулярная функция.

6) Вычислите размерность семейства k-мерных подпространств на n-мерной неособой квадрике.

7) Докажите, что нетерова локальная область целостности размерности 1 регулярна тогда и только тогда, когда она целозамкнута. Как еще называются такие кольца и что это говорит об алгебраических кривых?

8) Пусть X, Y - многообразия над k (вариант: схемы над S, X целостная, а Y конечного типа), $x \in X$ точка (как схемы, т.е. не обязательно замкнутая). Покажите, что морфизм из $Spec\mathcal{O}_{X,x}$ в Y продолжается до морфизма из некоторой окрестности x в Y.

9) Пусть X, Y - многообразия над k (вариант: схемы конечного типа над нетеровой S), X нормальное, а Y полное. Пусть $f : U \to Y$ - морфизм, где $U \subset X$ - непустое открытое подмножество. Покажите, что существует открытое $V \supset U$, содержащее все точки коразмерности 1 в X, такое, что f продолжается на V (заметьте, что локальное кольцо такой точки - кольцо нормирования и воспользуйтесь валюативным критерием, а потом предыдущей задачей). Что это говорит о кривых?

10) Покажите, что если два морфизма из приведенной схемы в отделимую совпадают на плотном открытом подмножестве, то они совпадают.

11) a) Используя теорему о примитивном элементе, докажите, что любое многообразие бирационально эквивалентно гиперповерхности. Выведите отсюда, что на любом многообразии есть неособые точки, и они образуют плотное открытое подмножество.

b) В характеристике нуль докажите обращение теоремы о примитивном элементе по следующей схеме. Покажите что если $X \subset \mathbb{P}^m$ и $\dim X < n-1$, то проекция из достаточно общей точки то есть лежащей вне некоторого замкнутого подмножества в $\mathbb{P}^m$ (в частности, не лежащей в X) является конечным и бирациональным. Далее спроектировав нужное число раз X из точки сведите случай к гиперповерхности и докажите теорему о примитивном элементе с помощью последней проекции.

12) Доказать, что если гиперповерхность степени 3 имеет две особые точки, то соединяющая их прямая лежит на этой гиперповерхности. Что можно сказать о плоских кривых степени 3 с тремя особыми точками?

13) Доказать, что если гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ содержит линейное подпространство размерности $\geq n/2$, то она имеет особые точки.

14) a) Пусть $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ точная последовательность пучков на схеме X, где пучок $\mathcal{F}$ — вялый. Докажите, что точна последовательность пространств сечений $0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X) \to 0$.

b) Пусть $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ точная последовательность квазикогерентных пучков на аффинной схеме X. Докажите, что точна последовательность пространств сечений $0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X) \to 0$.

15) Докажите, что $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{F}$ на схеме X квазикогерентен тогда и только тогда, когда любая точка имеет окрестность U, где есть точная последовательность пучков $\oplus_{i\in I}\mathcal{O}_U \to \oplus_{j\in J}\mathcal{O}_U \to \mathcal{F}|_U \to 0$; $\mathcal{F}$ когерентен на нетеровой X, если к тому же множество индексов J можно взять конечным.