Листок 2: кольца и модули, продолжение. Топология Зариского. Нетеровость.

Задачи по коммутативной алгебре - матфак ВШЭ

16 октября 2018 г.

Напомним, что $Spec(A)$ – это множество простых идеалов в кольце A.

1 Для любого подмножества $E \subset A$ пусть $V(E)$ – множество простых идеалов, содержащих E. Проверить, что $V(E)$ удовлетворяют аксиомам для замкнутых множеств в некоторой топологии (пересечение и объединение). Эта топология называется топологией Зариского на $Spec(A)$. Когда она хаусдорфова? Покажите что для идеала I выполнено:

$$\mathrm{rad(I)} = \cap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{SpecA}, \mathfrak{p} \supset \mathrm{I}} \quad \mathfrak{p},$$

Покажите, что для двух идеалов I_1, I_2 выполнено $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 \cdot I_2)$. Верно ли это равенство для произвольных подмножеств?

2 Пусть теперь $f \in A$ и X_f – дополнение к $V(f)$. Для каких f, множество X_f пусто? совпадает со $Spec(A)$? Покажите, что $Spec(A)$ квазикомпактно, то есть, из любого открытого покрытия $Spec(A)$ можно выделить конечное подпокрытие (приставка "квази" здесь оттого, что $Spec(A)$, как правило, не хаусдорфово). Указание: можно без ограничения общности заменить любое открытое покрытие на покрытие подмножествами вида X_f.

3 Покажите, что в кольце A есть идемпотенты, отличные от 0 и 1, тогда и только тогда, когда $A \cong A_1 \times A_2$, $A_i \neq 0$ (указание: если e идемпотент, то $1 - e$ тоже идемпотент). Что можно сказать о простых идеалах в $A_1 \times A_2$? О топологическом пространстве $Spec(A_1 \times A_2)$?

4 Радикалом Джекобсона $r(A)$ называют пересечение всех максимальных идеалов в A. Покажите, что $x \in r(A)$ тогда и только тогда, когда $1 - xy$ обратим для любого $y \in A$.

5 Пусть M – квадратная матрица $(n \times n)$ с коэффициентами в кольце A. Покажите, что существует такая матрица $\tilde{M}$ (с коэффициентами в A), что $M\tilde{M} = \tilde{M}M = det(M)Id$, и что заданное M отображение A^n в себя биективно тогда и только тогда, когда $det(M)$ обратим в A.

6 (Лемма Накаямы) Пусть I – идеал в A, а M – такой конечно порожденный A-модуль, что $IM = M$. Тогда существует такой $x \in I$, что $(1-x)M = 0$. В частности, если I содержится в радикале Джекобсона, то $M = 0$. Указание: ищите $(1-x)$ как детерминант некоторой матрицы.

7 Покажите, что в конечной алгебре над полем лишь конечное число максимальных идеалов (используйте китайскую теорему об остатках).

8 Покажите, что радикал Джекобсона конечной алгебры над полем нильпотентен, т.е. $r(A)^n = 0$ для некоторого n (используйте лемму Накаямы).

9 Выведите отсюда и из задач предыдущего листка про взаимно простые идеалы, что конечная алгебра над полем изоморфна произведению своих факторов по некоторым степеням максимальных идеалов. Что можно сказать про конечную алгебру над полем без нильпотентов? Про спектр конечной алгебры над полем?