Листок 1: кольца и модули, повторение

Задачи по коммутативной алгебре - матфак ВШЭ

16 октября 2018 г.

Предполагается, что студенты знакомы с определениями кольца и модуля над кольцом. Все кольца будут ассоциативными, коммутативными, с единицей. Напомним, что идеал I в кольце A - это подмодуль A как модуля над собой, то есть, подгруппа A по сложению, стабильная относительно умножения на все элементы кольца. Фактормодуль A/I тогда обладает структурой кольца (т.е. умножение по правилу $(a+I)(b+I) = ab+I$ корректно определено) и называется факторкольцом A по идеалу I. Идеал, порожденный элементами $a_1, \dots, a_k$, обозначается $(a_1, \dots, a_k)$. Идеал, не совпадающий со всем кольцом, называется простым, если из $xy \in I$ следует $x \in I$ или $y \in I$, и максимальным, если он не содержится ни в каком другом собственном идеале. Область главных идеалов - это целостное кольцо, где любой идеал порожден одним элементом.

1 Докажите, что A – поле, если и только если в A нет идеалов, кроме (0) и (1).

2 Пусть идеал I прост (соответственно, максимален). Что можно сказать о факторкольце A/I? Докажите, что максимальный идеал прост.

3 Докажите существование максимальных идеалов, а также то, что любой идеал содержится в максимальном (указание: используйте лемму Цорна).

4 Докажите, что в области главных идеалов следующие условия эквивалентны: (1) I прост; (2) I максимален; (3) I порождается неприводимым элементом.

5 Докажите, что кольцо многочленов от одной переменной $A[X]$ – область главных идеалов тогда и только тогда, когда A – поле.

6 Опишите простые идеалы в $\mathbf{Z}[X]$ (удобно вначале посмотреть на пересечение такого идеала с $\mathbf{Z}$).

7 Идеалы I и J называются взаимно простыми, если $I+J=A$. Докажите, что если $I_1,\ldots,I_k$ попарно взаимно просты, то $I_1I_2\ldots I_k = \bigcap_{1\le l\le k} I_l$.

8 Китайская теорема об остатках: если $I_1,\ldots,I_k$ попарно взаимно просты, то отображение $A\to A/I_1\times\ldots\times A/I_k$ — сюръективно.

9 Докажите, что простой идеал конечной алгебры над некоторым полем является максимальным.

10 Для короткой точной последовательности модулей

$$0\to M_1 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M_2 \to 0,$$

следующие условия эквивалентны:

(i) $M\cong M_1\oplus M_2$

(ii) Существует гомоморфизм $\sigma : M_2\to M$, такой что $\pi\circ\sigma=\mathrm{id}$.

(ii) Существует гомоморфизм $p : M\to M_1$, такой что $p\circ i=\mathrm{id}$.