Забродин Антон Владимирович

zaabrodin@itep.ru

1 Вокруг обратной задачи теории потенциала

Тема рекомендована студентам 2–4 курсов и магистрантам.

Предмет теории потенциала - гравитационные или электрические поля, создаваемые телами. Их потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа вне тела и уравнению Пуассона внутри его. Обратная задача состоит в определении формы тела по создаваемому им полю или, что то же самое, по набору величин, которые называются гармоническими моментами тела. Это большая и сложная область со множеством интересных приложений, имеющая глубокие связи с фундаментальными вопросами математической физики. Так, в двух измерениях обратная задача теории потенциала тесно связана с теорией интегрируемых систем. Возможные темы для самостоятельного изучения/исследования: а) известные результаты о существовании и единственности решения и их доказательства, б) явные примеры, когда решение не единственно, в) вариационные принципы в обобщенной обратной задаче теории потенциала, соотношения взаимности для гармонических моментов в двух и трех измерениях, г) "игрушечный"(но поучительный) пример: обратная задача теории потенциала в одном измерении и ее связь с интегрируемыми системами.

Литература: А.Варченко, П.Этингоф, Почему граница круглой капли превращается в инверсный образ эллипса, Наука, 1995 и ссылки там;
А.Забродин, Бездисперсионный предел уравнения Хироты в некоторых задачах комплексного анализа, ТМФ 129 (2001) 239-257.

2 Модели случайных матриц (комплексные и нормальные матрицы) и бета-ансамбли

2.1 Мера на многообразии комплексных и нормальных матриц

Тема рассчитана на студентов 2–4 курсов и магистрантов.

Ответы здесь известны, но интересно найти различные и по возможности простые способы их получения или хотя бы продумать существующие.

Мера (форма объема) на многообразии квадратных матриц с произвольными комплексными элементами факторизуется в произведение двух множителей, один из которых зависит только от собственных значений, а второй - от остальных ("угловых") координат на могоообразии матриц. Предлагается вывести этот факт из первых принципов и найти явный вид фактора, зависящего от собственных значений, а также исследовать вопрос о том, какие матричные интегралы (т.е. интегралы по многообразию матриц) допускают явное вычисление.

Литература: M.Mehta, Random matrices (перевод: М.Мета, Случайные матрицы, МЦНМО, 2012).

2.2 Предел больших N

Тема рассчитана на студентов 2–4 курсов и магистрантов.

В некоторых специальных случаях модель нормальных случайных матриц любого конечного размера N допускает абсолютно явное решение. Большой интерес представляет предел N к бесконечности. Предлагается изучить плотность распределения собственных значений и парные корреляционные функции плотностей на комплексной плоскости в этом пределе и получить для них точные и/или асимптотические формулы.

Литература: M.Mehta, Random matrices (перевод: М.Мета, Случайные матрицы, МЦНМО, 2012).
A.Zabrodin, Matrix models and growth processes: from viscous flows to the quantum Hall effect, hep-th/0412219, in: "Applications of Random Matrices in Physics", pp. 261-318, Ed. E.Brezin et al, Springer, 2006.

2.3 Бета-ансамбли

Тема рассчитана на студентов 2–4 курсов и магистрантов.

Двумерный бета-ансамбль (кулоновский газ с обратной температурой β) при $\beta \neq 1$ ($\beta = 1$ это модель комплексных или нормальных матриц).

Это по-настоящему сложная исследовательская задача, в которой не известны не только ответы на некоторые первоочередные вопросы, но и методы решения. Любое, даже малое продвижение может быть исключительно ценно для многочисленных приложений (например, к квантовому эффекту Холла). Для любителей счета на компьютере здесь огромное (почти непаханное) поле деятельности. Численные данные могут помочь в угадывании правильных гипотез о том, как ведут себя свободная энергия, плотность распределения заряда и другие величины в зависимости от β.

Литература: P.J.Forrester, Log-Gases and Random Matrices, London Mathematical Society Monographs, Princeton University Press.
A.Zabrodin and P.Wiegmann, Large N expansion for the 2D Dyson gas, hep-th/0601009, J. Phys. A.: Math. Gen. 39 (2006) 8933-8963.

3 Динамика полюсов решений интегрируемых уравнений (Кадомцева-Петвиашвили, двумеризованной цепочки Тоды и др.

Тема рассчитана на студентов 2–4 курсов и магистрантов.

Это давний и интересный сюжет в теории интегрируемых систем, связывающий специальные классы решений интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и интегрируемые системы многих частиц в одном измерении. В общем случае требуется хорошее знание эллиптических функций. Однако, в вырожденных случаях - рациональном и тригонометрическом, - все необходимые вычисления совершенно элементарны (хотя иногда и громоздки). При этом ответы на некоторые вопросы неизвестны даже в вырожденных случаях. В последнее время интерес к этому сюжету возрос в связи с обнаружением неожиданных и еще плохо понятых связей с квантовыми интегрируемыми системами, которые решаются методом анзаца Бете.

Литература: И.М. Кричевер, Нелинейные уравнения и эллиптические кривые, Итоги науки и техники, сер. Современные проблемы математики, т. 23, 79–136 (1983).
И.М. Кричевер, Эллиптические решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили и интегрируемые системы частиц, Функц. анализ и его прил., 14 (4), 45-54 (1980).

4 Интегрируемые иерархии и конформные отображения

Тема рассчитана на студентов 2–4 курсов и магистрантов, необходимо хорошее знание комплексного анализа.

Как стало понятно в начале этого века, решения интегрируемых иерархий дифференциальных уравнений в частных производных в пределе нулевой дисперсии описывают конформные отображения односвязных областей на комплексной плоскости. Исторически первый и наиболее хорошо изученный пример – иерархия уравнений бездисперсионной двумеризованной цепочки Тоды. Это позволяет надеяться на эффективизацию теоремы Римана о конформных отображениях, а именно, на конструктивный ответ на вопрос, как по данной области найти конформное отображение этой области на единичный круг (теорема Римана гарантирует только существование такого отображения и ничего не говорит о том, как его построить). Среди открытых вопросов, связанных с этой тематикой, имеется, например, вопрос о том, какие конформные отображения связаны аналогичным образом с другими интегрируемыми иерархиями – такими, например, как иерархия уравнений типа Кадомцева-Петвиашвили, ассоциированных с сериями алгебр Ли B и D.

Литература: T. Takebe, *Lectures on dispersionless integrable hierarchies*, Lecture Notes, Volume 2 (2014);
P. Wiegmann and A. Zabrodin, *Conformal maps and integrable hierarchies*, Comm. Math. Phys. 213 (2000) 523-538;
А.Забродин, Бездисперсионный предел уравнения Хироты в некоторых задачах комплексного анализа, ТМФ 129 (2001) 239-257.