

Материалы к семинарам по гладким многообразиям (10.09.2018–14.09.2018)

Задача 1.1. Рассмотрим отображение плоскости в плоскость:

$$y_1 = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1, \quad y_2 = 2x_1x_2 - 2x_2$$

- а) Найдите множество критических точек этого отображения и нарисуйте ядра дифференциала в критических точках.
- б) Найдите множество критических значений этого отображения.

Задача 1.2. Зная первые коэффициенты ряда Тейлора функции F из теоремы о неявной функции, найдите первые коэффициенты ряда Тейлора неявной функции ϕ .

Задача 1.3. Пусть $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция, причем $F(0,0) = 0$. При каких условиях на F уравнение $F(F(x,y), y) = 0$ можно разрешить относительно y (как гладкой функции от x) в окрестности $(0,0)$?

Задача 1.4. Поверхность M задана уравнением $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - xyz = 0$.

- а) Проверьте, что в окрестности точки $(1,1,1)$ теорема о неявной функции позволяет локально выразить любую переменную через две другие.
- б) Для функции $h(x,y,z) = x^2yz$ на этой поверхности найдите $\partial h / \partial x$ в точке $(1,1,1)$, если считать независимыми переменными x и y , а $z = z(x,y)$ выразить из уравнения $F(x,y,z) = 0$.
- в) Выразите dh на M через dx и dy , а также через dx и dz .

Задача 1.5. Как представить

- а) двумерную сферу,
- б) двумерный тор

как гладкое подмногообразие в \mathbb{R}^3 (проверив, что это действительно подмногообразие согласно определению)?