Дискретная математика I 2018, матфак ВШЭ

Семинар 6. Мощность множеств.

Множества называются равномощными ($M \sim N$ или $|M| = |N|$), если между ними существует взаимно однозначное соответствие. Равномощность – отношение эквивалентности на "множестве всех множеств" (лучше, на множестве всех подмножеств некоторого множества X). Счётным называется множество, равномощное натуральному ряду $\mathbb{N}$, несчётным – бесконечное множество, неравномощное счётному. Континуумом называется мощность множества действительных чисел.

Задача 1. Установите взаимно однозначное соответствие между

a) множеством бесконечных последовательностей нулей и единиц и множеством $2^{\mathbb{N}}$ всех подмножеств натурального ряда;
b) множеством бесконечных последовательностей нулей и единиц и множеством бесконечных последовательностей цифр $0, 1, 2$;
c) множеством бесконечных последовательностей нулей и единиц и множеством последовательностей цифр $0, 1, 2$;
d) интервалами $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$.

Задача 2. Покажите, что

a) любое подмножество счётного множества конечно или счётно;
b) всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество;
c) объединение конечного или счётного числа счетных множеств счётно;
d) декартово произведение конечного числа счетных множеств счётно.

Задача 3. a) Пусть M бесконечно, а N счётно. Докажите, что тогда $M \sim M \cup N$. Установите явную биекцию.
b) Установите взаимно однозначное соответствие между интервалом $(0, 1)$ и полуинтервалом $[0, 1)$.
c) Докажите, что отрезок $[0, 1]$ равномощен множеству бесконечных последовательностей нулей и единиц.

Задача 4. Докажите, что квадрат равномощен отрезку.

Теорема (Теорема Кантора-Бернштейна)**.** *Если множество A равномощно подмножеству множества B, а множество B равномощно подмножеству множества A, то множества A и B равномощны.*

Задачи на теорему Кантора-Бернштейна.

Задача 5. Скажем, что мощность M не больше мощности N ($|M| \leq |N|$), если существует инъективное отображение M в N. Покажите, что так определено отношение частичного (нестрогого) порядка на мощностях (классах равномощных множеств). Как сформулировать соответствующее понятие строгого порядка?

Задача 6. a) Установите равномощности, сформулированные в задаче 3, используя теорему Кантора-Бернштейна.
b) Покажите, что если множество точек на плоскости содержит интервал или дугу окружности, то оно имеет мощность континуум.

Домашнее задание к семинару 6

Все задания сдаются письменно.

Задача 1. Покажите, что множество конечных последовательностей натуральных чисел счётно.

Задача 2. Покажите, что

a) объединение счётного числа континуальных множеств имеет мощность континуум;

b) множество всех конечных последовательностей действительных чисел имеет мощность континуум.

Задача 3. Покажите, что любое непустое множество непересекающихся интервалов на прямой счётно.

Задача 4. Предъявите взаимно однозначное соответствие между интервалом $(0, 1)$ и отрезком $[0, 2]$.

Листок 6

Листок считается сданным, если решено 6 задач из него. Пункт со * идет за два, с двумя * за три.

Задача 1. Покажите, что множество точек разрыва неубывающей функции действительного аргумента конечно или счётно.

Задача 2. Покажите, что множество прямых на плоскости имеет мощность континуум.

Задача 3. Покажите, что множество всех бесконечных последовательностей действительных чисел имеет мощность континуум.

Определение. *Действительное число называется* алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с рациональными коэффициентами. Действительное число, не являющееся алгебраическим, называется* трансцендентным*.*

Задача 4. Покажите, что множество всех алгебраических чисел счётно, а множество всех трансцендентных чисел имеет мощность континуум.

Задача 5. * Докажите, что если квадрат разбит на две части, то хотя бы одна из них имеет мощность континуум.

Задача 6. * Пусть $f : M \to N$ и $g : N \to M$ – два инъективных отображения. Покажите, что множества M и N можно разбить на непересекающиеся подмножества $M = M' \sqcup M''$, $N = N' \sqcup N''$ так, что f осуществляет биекцию между M' и N', а g – биекцию между N'' и M''.

Задача 7. Докажите теорему Кантора в общей формулировке: $|2^M| > |M|$ для любого множества M.

Задача 8. * Пусть M – замкнутое множество на прямой без изолированных точек. Покажите, что тогда оно имеет мощность континуум.

Задача 9. Имеет ли мощность континуума множество

a) всех функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
b) * биективных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
c) ** непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?