Листок 2.2

Интеграл Лебега

срок сдачи 16 ноября

Задача 1. а) Если последовательность измеримых функций $f_n\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ сходится по мере Лебега, то для любого $\varepsilon > 0$ у неё найдется подпоследовательность f_{n_k}, которая сходится равномерно на множестве, мера дополнения к которому меньше ε.
б) (Теорема Рисса) Если последовательность измеримых функций $f_n\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ сходится по мере Лебега, то у неё существует подпоследовательность f_{n_k}, сходящаяся почти всюду.

Задача 2. Если последовательность измеримых функций $f_n\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ сходится по мере Лебега, то предельная функция измерима.

Задача 3.* Пусть f_n — последовательность возрастающих функций, сходящаяся по мере к функции f. Докажите, что она сходится почти всюду.
Указание. Докажите, что $f = \tilde{f}$ п. в., причём $\tilde{f}$ возрастает и сходимость имеет место в точках непрерывности $\tilde{f}$.

Задача 4 (Множество хаусдорфовой размерности $d \in (0;1)$ на отрезке)**.** Определим последовательность множеств $C_1, C_2, \dots \subset [0;1]$ индуктивно по аналогии с построением канторова совершенного множества. Положим $C_1 = [0;1]$, и пусть C_{n+1} получается выбрасыванием интервала из каждого отрезка множества C_n так, что получается 2^n отрезков длины $2^{-n/d}$. Пусть $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.
а) Найдите d-мерный объём покрытия C_n множества C.
б) Докажите, что хаусдорфова размерность множества C не больше d.
в) Постройте аналог «канторовой лестницы»: сюръекцию множества C на $[0;1]$.

Задача 5. а) Докажите, что построенное отображение — гёльдерово.
б) Пусть f — вещественная гёльдерова функция на отрезке $[0,1]$ с показателем α. Докажите, что для любого множества $X \subset [0,1]$ выполняется $\dim_H f(X) \leq \frac{\dim_H X}{\alpha}$.
в) Докажите, что хаусдорфова размерность множества C в точности равна d.
г) Постройте континуальное множество нулевой хаусдорфовой размерности.

Задача 6 (Свойства интеграла Лебега)**.** Пусть $f, g\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ — суммируемые функции, $E, F \subset [0;1]$ — непересекающиеся измеримые множества, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда выполнены следующие свойства:
а) (линейность) $\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$;
б) (аддитивность) $\int_E f d\mu + \int_F f d\mu = \int_{E \sqcup F} f d\mu$;
в) (абсолютная непрерывность) для любого $\varepsilon > 0$ существует δ такое, что

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E f d\mu < \varepsilon.$$

Указание. Можно считать, что соответствующие свойства известны для ограниченных функций.

Задача 7 (Теорема Леви (о монотонном пределе интегрируемых функций).*
Пусть $f_n\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ — монотонно возрастающая последовательность суммируемых функций, то есть $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [0;1]$. Пусть также их интегралы ограничены в совокупности:

$$\int_{[0;1]} f_n(x) d\mu \leqslant K \qquad \text{для некоторого } K \in \mathbb{R}.$$

Тогда:
а) функции $f_n(x)$ сходятся почти всюду к некоторой функции $f(x)$;
б) предельная функция $f(x)$ суммируема на $[0;1]$;
в) функции $f_n(x)$ сходятся к функции $f(x)$ в среднем, т.е. по норме L_1;
г) допустим предельный переход под знаком интеграла, т.е. $\int_{[0;1]} f(x)d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0;1]} f_n(x)d\mu$.

Задача 8. Пусть $f \geq 0$ — суммируемая функция на $[0,1]$. Докажите формулу

$$\int_0^1 f dx = \int_0^\infty \mu(\{x : f(x) > t\})dt,$$

μ — мера Лебега. Интеграл в правой части понимается в смысле Римана.

Задача 9. Докажите, что функционал

$$d(f,g) = \int_0^1 \frac{|f-g|}{1+|f-g|} dx$$

является метрикой на пространстве классов эквивалентности измеримых функций и задаёт сходимость по мере.

Задача 10 (Теорема Фату.).*
Пусть дано измеримое множество $E \subset [0;1]$. Если последовательность измеримых неотрицательных функций $f_n\colon E \to [0,+\infty)$ сходится к $f\colon E \to [0,+\infty)$ почти всюду и

$$\int_E f_n \, d\mu \leqslant K \qquad \text{для некоторого } K \in \mathbb{R},$$

то f суммируема на E и

$$\int_X f \, d\mu \leqslant K.$$