# 1 Принцип наименьшего действия

# 2 Законы сохранения

# 3 Интегралы движения и задача Кеплера

# 4 Уравнения Гамильтона

# 5 Скобки Пуассона

## 5.1 Еще раз о канонических уравнениях

Напомним еще раз, что из канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{1}$$

тривиальным образом следует закон сохранения энергии

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) \underset{(1)}{=} \frac{\partial H}{\partial t} \tag{2}$$

при $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ при явно не зависящей от времени функции Гамильтона. Точно также можно написать вообще для *любой* функции на фазовом пространстве $\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) = \\ &\underset{(1)}{=} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \end{aligned} \tag{3}$$

где введено обозначение для *скобки Пуассона*

$$\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \tag{4}$$

любых двух функций $f = f(p, q)$ и $g = g(p, q)$ на $\mathcal{M}$. Сразу очевидно, что

- Для любой явно независящей от времени $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ функции на $\mathcal{M}$ из

$$\{f, H\} = 0 \tag{5}$$

следует $\frac{df}{dt} = 0$, т.е. если функция находится в пуассоновой инволюции с Гамильтонианом, то она является интегралом движения – т.е. постоянной на траектории динамической системы.

- Для координат Дарбу скобки Пуассона имеют *канонический* вид

$$\begin{gathered} \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \dots, N \\ \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

## 5.2 Пуассонова геометрия фазового пространства

Вернемся к произвольному симплектическому многообразию $\mathcal{M}$, с невырожденной замкнутой, положительно определенной 2-формой $\omega$

$$\begin{gathered} \omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \\ d\omega = 0, \qquad \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} = 0, \quad \forall\ i, j, k \end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим теперь гамильтонов поток на произвольном симплектическом многообразии $\mathcal{M}$, который мы уже записывали в виде

$$\dot{x} = \xi_H(x) = \Omega dH, \qquad \text{or} \quad \dot{x}^i = \xi_H^i(x) = \sum_j \Omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \tag{8}$$

где $dH$ – дифференциал функции Гамильтона на фазовом пространстве, а $\Omega^{ij} = \omega_{ij}^{-1}$.

Очевидно, что это уравнение переписывается через скобки Пуассона в виде:

$$\dot{x} = \{x, H\}, \qquad \{f, g\} = \sum_{i,j} \Omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{i,j} \Omega^{ij} \partial_i f \partial_j g \tag{9}$$

где $\Omega^{ij} = -\Omega^{ji}$ – компоненты так называемого пуассонова бивектора. Каков геометрический смысл полученной формулы? Посмотрим на коммутатор двух гамильтоновых векторных полей $[\xi_f, \xi_g]$, для произвольных функций $f$ и $g$ на $\mathcal{M}$. Имеем

$$[\xi_f, \xi_g] = \left[\xi_f^i \partial_i, \xi_g^j \partial_j\right] = \left(\xi_f^i \partial_i \xi_g^j - \xi_g^i \partial_i \xi_f^j\right) \partial_j \tag{10}$$

что пока означает лишь то, что векторные поля образуют алгебру Ли – в правой части стоит векторное поле $\xi(f,g) = \sum_k \xi^k(f,g)\partial_k$, где $\xi^k(f,g) = \sum_i (\xi_f^i \partial_i \xi_g^k - \xi_g^i \partial_i \xi_f^k)$. Если же векторные поля гамильтоновы, то

$$\xi^k(f,g) = \sum_i (\xi_f^i \partial_i \xi_g^k - \xi_g^i \partial_i \xi_f^k) = -\sum_l \Omega^{kl} \partial_l h \tag{11}$$

с некоторой функцией $h = h(f,g)$ на $\mathcal{M}$, т.е. гамильтоновы векторные поля образуют подалгебру в алгебре Ли всех векторных полей. Более того, прямым вычислением (разобрать подробно на семинаре?) может быть доказана

*Теорема*: Коммутатор двух гамильтоновых векторных полей на $\mathcal{M}$

$$[\xi_f, \xi_g] = -\xi_h \tag{12}$$

является тоже гамильтоновым векторным полем, где

$$h = \{f, g\} = \sum_{i,j} \Omega^{ij} \partial_i f \partial_j g \tag{13}$$

есть ни что иное, как скобка Пуассона соответствующих функций.

*Доказательство*: В самом деле:

$$\begin{gathered}
\xi^k(f,g) = \sum_{i,j,n} \left(\Omega^{ij} \partial_j f \partial_i \left(\Omega^{kn} \partial_n g\right) - (f \leftrightarrow g)\right) = \\
= \sum_{i,j,n} \left(\Omega^{kn} \Omega^{ij} \partial_j f \partial_i \partial_n g + \Omega^{ij} \partial_i \Omega^{kn} \partial_j f \partial_n g - (f \leftrightarrow g)\right) = \\
= \sum_{i,j,n} \Omega^{kn} \partial_n \left(\Omega^{ij} \partial_j f \partial_i g\right) + \\
+ \sum_{i,j,n} \left(-\Omega^{kn} \partial_n \Omega^{ij} \partial_j f \partial_i g + \Omega^{ij} \partial_i \Omega^{kn} \left(\partial_j f \partial_n g - \partial_j g \partial_n f\right)\right)
\end{gathered} \tag{14}$$

Первый член в правой части дает буквально утверждение теоремы (12), (13), а для второй суммы (меняя немые индексы суммирования) имеем

$$\begin{gathered}
\sum_{i,j,n} \left(-\Omega^{ki} \partial_i \Omega^{nj} \partial_j f \partial_n g + \Omega^{ij} \partial_i \Omega^{kn} \partial_j f \partial_n g - \Omega^{in} \partial_i \Omega^{kj} \partial_j f \partial_n g\right) = \\
= -\sum_{j,n} \partial_j f \partial_n g \sum_i \left(\Omega^{ki} \partial_i \Omega^{nj} + \Omega^{ji} \partial_i \Omega^{kn} + \Omega^{ni} \partial_i \Omega^{jk}\right)
\end{gathered} \tag{15}$$

Это слагаемое обнуляется в виду тождества

$$\sum_i \left(\Omega^{ki}\partial_i\Omega^{nj} + \Omega^{ji}\partial_i\Omega^{kn} + \Omega^{ni}\partial_i\Omega^{jk}\right) = 0 \tag{16}$$

представляющего собой квадратичное соотношение, эквивалентное (7), переписанное в обратных матрицах (проверить на семинаре!), к геометрическому смыслу которого мы еще вернемся.

У этой теоремы имеется важнейшее:

*Следствие*: Если две функции на $\mathcal{M}$

$$\{f, g\} = 0 \tag{17}$$

находятся друг с другом в инволюции относительно скобки Пуассона (иногда на жаргоне говорят – "пуассоново коммутируют"), то соответствующие векторные поля

$$[\xi_f, \xi_g] = 0 \tag{18}$$

коммутируют.

## 5.3 Свойства скобок Пуассона

По своему определению скобка Пуассона обладает рядом свойств, из которых многие – почти очевидны:

- Антисимметричность

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \tag{19}$$

- Линейность

$$\{a_1 f_1 + a_2 f_2, g\} = a_1\{f_1, g\} + a_2\{f_2, g\}, \qquad a_1, a_2 \in \mathbb{C} \tag{20}$$

  по каждому аргументу.

- "Тождество Лейбница"

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g \tag{21}$$

которое распространяет пуассоновых соотношений для образующих на произвольные функции. Его можно действительно понимать как правило Лейбница, поскольку

$$
\begin{gathered}
\{f,h\} = \sum_{i,j} \Omega^{ij}\partial_i f \partial_j h = \sum_i \xi_h^i(x)\partial_i f = \xi_h(f) \\
\{fg,h\} = \xi_h(fg) = (\xi_h f)g + f(\xi_h g)
\end{gathered}
\tag{22}
$$

- Наконец, менее тривиальным является *тождество Якоби*

  $$\{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{f,\{g,h\}\} = 0 \tag{23}$$

  для любых трех функций $f$, $g$ и $h$ на $\mathcal{M}$, которое эквивалентно тождеству Якоби

  $$[\xi_h,[\xi_f,\xi_g]] + [\xi_g,[\xi_h,\xi_f]] + [\xi_f,[\xi_g,\xi_h]] = 0 \tag{24}$$

  в соответствующей алгебре Ли гамильтоновых векторных полей.

Тождество (24) элементарно доказывается прямым вычислением, явно расписывая коммутаторы $[\xi_f,\xi_g] = \xi_f \cdot \xi_g - \xi_g \cdot \xi_f$, а затем – повторные коммутаторы, при этом следя за порядком. Эквивалентное ему тождество (23) в каком-то смысле менее тривиально, и обеспечивается квадратичным соотношением (16) на пуассонов бивектор. Таким образом, функции на фазовом пространстве – а в более общем случае на любом пуассоновом многообразии – образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона.

## 5.4 Скобки Пуассона и интегралы движения

Напомним, что интегралами движения называются функции

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f,H\} = 0 \tag{25}$$

которые, в том случае когда явно не зависят от времени, определяются тем, что они находятся в пуассоновой инволюции с гамильтонианом $H$

$$\{f,H\} = 0 \tag{26}$$

*Задача*: доказать, что скобка пуассона двух интегралов движения является тоже интегралом движения. Указание: начать с более простом случае – явно не зависящих от времени интегралов, и воспользоваться тождеством Якоби.

Следствием этого является то, что в алгебре Ли функций на $\mathcal{M}$ существует подалгебра интегралов движения.

*Утверждение*: Алгебра Ли группы симметрий системы (по теоремы Нетер) изоморфна пуассоновой алгебре интегралов движения системы.

Действительно, вспомним, что согласно теореме Нетер симметрии генерируются векторными полями

$$X = \sum_{i=1}^{N} \chi^i(q) \frac{\partial}{\partial q_i} \tag{27}$$

действующими на $M$, а соответствующие им интегралы движения имеют вид

$$I_X = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \chi^i(q) = \sum_i \chi^i(q) p_i \tag{28}$$

Скобка Пуассона двух таких интегралов ($I_Z = \sum_i \zeta^i(q) p_i$)

$$\begin{aligned} \{I_X, I_Z\} = \sum_k \left( \frac{\partial I_X}{\partial q_k} \frac{\partial I_Z}{\partial p_k} - \frac{\partial I_X}{\partial p_k} \frac{\partial I_Z}{\partial q_k} \right) = \\ = \sum_i p_i \sum_k \left( \zeta_k \frac{\partial \chi^i}{\partial q_k} - \chi_k \frac{\partial \zeta^i}{\partial q_k} \right) = -I_{[X,Z]} \end{aligned} \tag{29}$$

является интегралом движения, отвечающим коммутатору векторных полей в алгебре Ли группы нетеровской симметрии.

Примеры:

- Закон сохранения импульса для циклической координаты $\frac{dp_A}{dt} = 0$ генерируется сдвигом соответствующей координаты, т.е. векторным полем

$$X_A = \frac{\partial}{\partial q_A} \tag{30}$$

Соответствующий интеграл движения в гамильтоновой картине $I_A = p_A$. В случае нескольких циклических координат соответствующие векторные поля коммутируют

$$[X_A, X_B] = \left[\frac{\partial}{\partial q_A}, \frac{\partial}{\partial q_B}\right] = 0 \tag{31}$$

и этому отвечают нулевые канонических скобки Пуассона

$$\{I_A, I_B\} = \{p_A, p_B\} = 0 \tag{32}$$

соответствующих импульсов.

- Преобразования вращения, генерирующиеся векторными полями

$$V_i = -\epsilon_{ijk} q_j \frac{\partial}{\partial q_k}, \qquad [V_i, V_j] = \epsilon_{ijk} V_k \tag{33}$$

при $i, j, k = 1, 2, 3$ в $\mathbb{R}^3$. Мы выводили, что соответствующие интегралы движения – компоненты вектора момента импульса

$$M_i = \epsilon_{ijk} q_j p_k, \quad i = 1, 2, 3 \tag{34}$$

Задача: вычислить скобки Пуассона $\{M_i, q_j\}$, $\{M_i, p_j\}$ и $\{M_i, M_j\}$. Ответ очевиден.