# Ландо Сергей Константинович

lando@hse.ru

## 1 Стратификация пространств рациональных функций

*Тема рекомендована студентам 2–4 курсов и магистрантам.*

Предмет изучения — пространства рациональных функций комплексной переменный. Типичными примерами таких пространств являются пространство многочленов заданной степени $n$

$$\mathcal{R}_{n^1} = \{x^n + a_2 x^{n-2} + \dots a_n\}$$

и пространство рациональных функций с четырьмя полюсами первого порядка

$$\mathcal{R}_{1^4} = \{ax + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x-t} + e\}.$$

В первом случае мы имеем дело с векторным пространством $\mathcal{R}_{n^1} = \mathbb{C}^{n-1}$, координатами в котором служат коэффициенты многочлена $a_2, a_3, \dots, a_n$. Топология пространства $\mathcal{R}_{1^4}$ более сложна; комплексные параметры $a, b, c, d, e, t$ служат лишь локальными координатами в нем. Каждое такое пространство естественным образом стратифицировано — разбито на подпространства, образованные функциями с предписанными типами критических значений. Задача состоит в определении взаимного расположения этих подпространств. В частности, интересно, является ли пересечение подпространств, отвечающих одному вырожденному критическому значению, трансверсальным. Для пространств многочленов ситуация изучена полностью, однако уже для подпространств пространств рациональных функций с двумя полюсами она далека от полного понимания, и просчет даже простейших примеров будет очень полезен.

## 2 Комбинаторные алгебры Хопфа

Построение инвариантов конечного порядка узлов и зацеплений тесно связано со структурой алгебр Хопфа на пространствах, порожденных графами и близкими к графам комбинаторными объектами.

### 2.1 Построение инвариантов графов, удовлетворяющих 4-членным соотношениям

*Тема рассчитана на студентов 1–4 курсов и магистрантов.*

Инвариант узлов порядка не выше $n$ определяет функцию на хордовых диаграммах с $n$ хордами, удовлетворяющую так называемым 4-членным соотношениям Васильева. По теореме Концевича всякая такая функция происходит из некоторого инварианта узлов. Аналогичные 4-членные соотношения можно написать и для других комбинаторных объектов — графов, вложенных графов, бинарных дельта-матроидов. Всякая функция, удовлетворяющая этим соотношениям, определяет инвариант узлов или зацеплений. Поэтому интересно строить такие функции явно.

Один из способов строить новые инварианты из уже известных состоит в следующем. Если $f$ — мультипликативная функция на алгебре Хопфа графов, то ей можно естественным образом сопоставить функцию $F$ из этой алгебры Хопфа в алгебру Хопфа многочленов от бесконечного числа переменных. При этом если функция $f$ удовлетворяет 4-членному соотношению, то то же справедливо и для функции $F$. Разнообразные известные инварианты графов требуют соответствующего анализа.

## 2.2 Связь между алгебрами Хопфа комбинаторной природы и интегрируемыми системами математической физики

*Тема рассчитана на студентов 3–4 курсов и магистрантов*

Хорошо известно, что усреднение некоторых величин, определенных на объектах комбинаторной природы, порождает решения интегрируемых иерархий математической физики. Недавно была обнаружена связь этого явления со структурой алгебры Хопфа на пространстве, порожденном простыми графами. Интерес представляют дальнейшее понимание этой связи и поиск других алгебр Хопфа комбинаторной природы, обладающих аналогичными свойствами.