Тиморин Владлен Анатольевич

vtimorin@hse.ru

1 Геометрический подход к определению поливекторов

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Алгебраически, *k-вектор* в $\mathbb{R}^n$ определяется как элемент k-ой внешней степени $\Lambda^k\mathbb{R}^n$. Задача: развить теорию k-векторов, исходя из следующего геометрического определения, похожего на определение вектора как класса эквивалентности направленных отрезков. Определим $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$, порожденное (поли)векторами вида $[P]$, где P — выпуклый ориентированный k-мерный многогранник в $\mathbb{R}^n$. Квадратные скобки — это просто обозначение для соответствия, переводящего многогранники в поливекторы. При этом в $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ выполнены следующие соотношения:

- Если многогранники P и Q лежат в одном и том же подпространстве размерности k, имеют одинаковые площади и ориентации, то $[P] = [Q]$.
- Если многогранники P и Q лежат в одном и том же подпространстве размерности k, имеют одинаковые площади, но разные ориентации, то $[P] = -[Q]$.
- Если $\lambda > 0$, а многогранник λP определяется как $\{\lambda x \mid x \in P\}$ с той же ориентацией, что и P, то $[\lambda P] = \lambda[P]$.
- Если Δ — ориентированный выпуклый многогранник размерности $k+1$, то $\sum[P] = 0$, где суммирование распространяется на все гиперграни (грани размерности k) многогранника Δ, ориентированные как граница многогранника Δ.

Все остальные соотношения в $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ являются следствиями перечисленных выше. Таким образом, $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ можно определить как некоторое факторпространство. (Сформулируйте это определение точно и строго). Докажите основные свойства поливекторов исходя из этого определения. Например, докажите, что всякий поливектор можно представить как линейную комбинацию параллелепипедов (точнее, поливекторов вида $[P]$, где P — параллелепипед) и посчитайте размерность пространства $\Lambda^k\mathbb{R}^n$.

Идея проекта принадлежит А.Г. Хованскому.

Источник:
М.М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр 1. Аналитическая геометрия*, Наука, 1979

2 Теорема о классификации прямолинейных шестиугольных 3-тканей

Тема рекомендована студентам 2–3 курсов.

Ткань на открытой области U плоскости — это несколько (скажем, 3) семейств кривых, таких, что каждое семейство заметает область U, и кривые из разных семейств не касаются. Разберите теорему о том, как выглядят прямолинейные 3-ткани, переводящиеся заменой координат в ткань из прямых, параллельных сторонам правильного треугольника. (Такие ткани называются прямолинейными шестиугольными 3-тканями).

Оказывается, каждая такая ткань связана с некоторой вещественной алгебраической кривой C, двойственной к кубике. Другими словами, множество всех касательных к C задается кубическим уравнением. Отсюда, в частности, следует, что из каждой точки плоскости можно провести не более чем 3 касательных к C. Любая прямолинейная шестиугольная 3-ткань состоит из касательных к некоторой кривой C описанного вида.

Источник:
В. Бляшке, *Введение в геометрию тканей*, Физматгиз, 1959

3 Теорема Гильберта о геометризации

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Разберите следующую теорему Д. Гильберта. Пусть G — группа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$. *Стабилизатор* точки $a \in \mathbb{R}^2$ определяется как подгруппа $G_a \subset G$, состоящая из всех $g \in G$, таких, что $g(a) = a$. Предположим, что выполнены следующие предположения на группу G:

- Для любых двух точек $a \neq b$, множество $G_a(b)$ (орбита точки b при действии группы G_a) бесконечно.
- Множество упорядоченных шестерок (a, b, c, a', b', c') точек, таких что
$$a' = g(a), \quad b' = g(b), \quad c' = g(c)$$
для некоторого $g \in G$, замкнуто в $(\mathbb{R}^2)^6$.

При этих предположениях существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм φ между $\mathbb{R}^2$ и евклидовой плоскостью или плоскостью Лобачевского, такой, что группа $\varphi G \varphi^{-1}$ совпадает с группой движений.

Источник:
Д. Гильберт, *Основания геометрии*, ОГИЗ Гостехиздат, 1948

4 Комбинаторное множество Мандельброта

Множество Мандельброта — один из самых известных фракталов. Это множество M всех комплексных чисел c, для которых последовательность
$$c, \quad c^2 + c, \quad (c^2 + c)^2 + c, \quad \ldots$$
ограниченна. Множество Мандельброта очень важно в теории комплексных динамических систем — благодаря явлению ренормализации, оно возникает практически во всех случаях, когда рассматриваются итерации голоморфных отображений, аналитически зависящих от параметра. Как доказали Дуади и Хаббард, множество M связно. Знаменитая гипотеза о том, что M также локально связно, на протяжении многих лет не поддается активным атакам со стороны многих замечательных математиков.

4.1 Квадратичная минорная ламинация

Тема рекомендована студентам 1–3 курсов.

Если множество M локально связно, то мы знаем про него все. Имеется модель, объясняющая в точности как устроено множество Мандельброта. Эта модель принадлежит В. Терстону и называется *квадратичной минорной ламинацией.*

Квадратичная минорная ламинация QML — это набор непересекающихся хорд и вписанных многоугольников в единичном диске. Этот набор можно описать явно — разберите это явное описание. Если схлопнуть все хорды и все многоугольники в QML, то полученное факторпространство M^c гомеоморфно множеству M — если только последнее локально связно. Пространство M^c называется *комбинаторным множеством Мандельброта.*

Источник:

W. Thurston. *The combinatorics of iterated rational maps* (1985), with appendix by D. Schleicher, *Laminations, Julia sets, and the Mandelbrot set*, published in: "Complex dynamics: Families and Friends", ed. by D. Schleicher, A K Peters (2009), 1–137.

4.2 Универсальный дендрит

Исследовательская тема рекомендована студентам 3–4 курсов и студентам магистратуры.

Множество M^c можно вложить в плоскость. Более того, имеется канонический способ это сделать, единственный с точностью до сохраняющего ориентацию гомеоморфизма плоскости. Рассмотрим топологическое пространство M^{cd}, полученное из M^c следующей операцией: замыкание каждой компоненты внутренности множества M^c схлопывается в точку. Множество M^{cd} тоже можно вложить в плоскость, канонически в том же смысле. Пространство M^{cd} представляет собой пример дендрита.

Вообще, *дендритом* называется такой локально связный континуум (континуум = связное компактное метризуемое топологическое пространство), который не содержит ни одной простой замкнутой кривой. Дендриты можно представлять себе как деревья, возможно, с бесконечным (или даже плотным) множеством вершин. *Универсальным дендритом* называется такой дендрит, в который можно вложить любой дендрит. Известны явные примеры универсальных дендритов, но эти явные примеры не играют заметной роли в математике.

Задача. Является ли множество M^{cd} универсальным дендритом?

5 Внешние бильярды в треугольнике на плоскости Лобачевского

Исследовательская тема рекомендована студентам 3–4 курсов и студентам магистратуры.

Внешний бильярд в треугольнике ABC устроен следующим образом. Начинаем с точки X, лежащей вне треугольника. Рассмотрим вершину треугольника, которая является самой правой, если смотреть из точки X. Допустим для определенности, что это вершина A. На прямой XA отметим точку $Y \neq X$, расстояние до которой от точки A совпадает с длиной отрезка AX. Точка Y — образ точки X при отображении бильярда. Внешний бильярд в треугольнике на аффинной плоскости не очень интересен, зато интересно рассматривать внешние бильярды на плоскости Лобачевского. Обозначим отображение бильярда через f. Это отображение определено во всех точках вне треугольника ABC, но не во всех точках является непрерывным. Пусть J — замыкание множества тех точек плоскости Лобачевского, в которых итерация $f^{\circ n}$ не является непрерывной для некоторого n.

Задача 1. Существуют ли блуждающие компоненты дополнения до множества J, то есть такие компоненты Ω, что $f^{\circ n}(\Omega) \cap \Omega = \varnothing$ для любого n?

Задача 2. Верно ли, что любая компонента Ω дополнения до множества J ограничена либо окружностью, либо выпуклым многоугольником?

Дипломная работа А. Пушкарь содержит промежуточные результаты в этом направлении, а также достаточно обширный экспериментальный материал. Эта исследовательская тема мотивирована задачами, поставленными С.Л. Табачниковым.

6 Окружности и расслоения Хопфа

Исследовательская тема рекомендована студентам 3–4 курсов и студентам магистратуры.

Задача. Пусть $f : \mathbb{R}P^3 \to S^2$ — достаточно гладкое сюръективное отображение, переводящее все прямые в окружности. Доказать (или опровергнуть), что $f = M \circ H \circ P$, где $P : \mathbb{R}P^3 \to \mathbb{R}P^3$ — проективный автоморфизм, $H : \mathbb{R}P^3 \to S^2$ — расслоение Хопфа, а $M : S^2 \to S^2$ — преобразование Мебиуса.

Мне кажется, что этот результат можно вывести из теоремы А.Г. Хованского про отображения из открытого подмножества плоскости в открытое подмножество сферы, переводящие отрезки прямых в дуги окружностей. Впрочем, возможно, этот результат проще, чем теорема А.Г. Хованского. Интересны также аналоги этого утверждения для кватернионного ($\mathbb{R}P^7 \to S^4$) и октавного ($\mathbb{R}P^{15} \to S^8$) расслоений Хопфа. В кватернионном случае, по всей видимости, можно было бы использовать мою теорему про отображения из открытого подмножества четырехмерного пространства в открытое подмножество четырехмерной сферы, переводящие отрезки прямых в дуги окружностей.