Айзенберг Антон Андреевич

ayzenberga@gmail.com

1 Ортогональные матрицы и трехмерная сфера

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов, обладающих базовой топологической интуицией.

В ходе курсовой работы нужно будет решить, либо разобраться в имеющемся решении следующей задачи:

У ортогональной матрицы размера 3×3 разрешается менять знак любого столбца или любой строки. Доказать, что пространство ортогональных матриц с точностью до указанных преобразований гомеоморфно трехмерной сфере.

В случае самостоятельного решения могут получиться какие-то новые красивые конструкции. В случае разбора имеющегося решения, у студента будет возможность разобраться с понятием торов Лиувилля-Арнольда и повысить свой уровень в топологии.

2 Основы топологической комбинаторики

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов, желающим узнать, как топология помогает решать элементарно формулируемые задачи комбинаторики

Граф Кнезера $K_{n,k}$ — это граф, вершинами которого являются все k-элементные подмножества в n-элементном множестве, а ребра — пары непересекающихся подмножеств. Задача вычисления хроматического числа такого графа достаточно сложная. Все имеющиеся решения этой задачи опираются на топологические методы и составляют основу топологической комбинаторики.

В ходе курсовой нужно будет разобраться с решением задачи о хроматическом числе графа Кнезера. Самый простой способ — внимательно разобрать статью Имре Бараня, в которой доказательство основывается на двух результатах, имеющих самостоятельную ценность: теореме Борсука-Улама из топологии и теореме Гейла из выпуклой геометрии, доказательства которых тоже нужно будет разобрать. При желании можно углубиться в топологическую комбинаторику.

3 Основы алгебраической комбинаторики симплициальных комплексов

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов, желающим узнать, как гомологическая алгебра и топология используются в задачах комбинаторики

Классическая задача алгебраической комбинаторики: описать соотношения на числа граней многогранников, симплициальных комплексов, или даже более общих клеточных комплексов.

В ходе курсовой работы нужно будет разобраться с базовыми понятиями: h-числами симплициальных комплексов, алгебрами Стенли-Райснера, теоремой Краскала-Катоны-Шутценберже, теоремой Маколея, соотношениями Дена-Соммервилля. В качестве самостоятельной работы можно попробовать доказать обобщенные соотношения Дена-Соммервилля для триангулированных многообразий.

4 Рационально нереализуемые выпуклые многогранники и двойственность Гейла

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов, интересующихся выпуклой геометрией

Выпуклые многогранники можно задавать двумя способами: либо как выпуклую оболочку конечного числа точек, либо как ограниченное пересечение конечного числа аффинных полупространств. Рациональным многогранником называется многогранник, у которого все вершины имеют рациональные координаты, или, что эквивалентно, у которого все полупространства задаются аффинными неравенствами с рациональными коэффициентами.

Многогранник называется симплициальным, если все его собственные грани суть симплексы. Многогранник называется простым, если в каждой его вершине сходится ровно столько гиперграней, какова его размерность. Каждый симплициальный многогранник можно, не меняя его комбинаторики, превратить в рациональный многогранник, немного пошевелив его вершины. Каждый простой многогранник можно сделать рациональным, пошевелив задающие его аффинные неравенства.

Оказывается, существует многогранник, не простой и не симплициальный, у которого нет выпуклой рациональной реализации. Надо будет разобраться с конструкцией такого многогранника. Эта конструкция опирается на понятие двойственности Гейла, играющей важную роль в выпуклой и алгебраической геометрии.

5 Триангуляции сфер, не имеющие выпуклой реализации

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов, интересующихся выпуклой геометрией

Известно, что существуют триангуляции сфер, для которых нельзя подобрать комбинаторно эквивалентный им симплициальный выпуклый многогранник. Такие сферы называются неполитопальными. Программа минимум для курсовой: разобраться с классическими конструкциями неполитопальных сфер: сферой Барнетта, сферой Брюкнера и сферами Бира. Следуя этой программе, можно изучить множество важных тем, начиная от базовой выпуклой геометрии, заканчивая оценками на числа Бетти полуалгебраических множеств.

Программа максимум такова. Конструкция сфер Бира позволяет массово производить неполитопальные сферы. А именно, доказано, что сфер Бира с заданным числом вершин асимптотически гораздо больше, чем может быть выпуклых симплициальных многогранников с заданным числом вершин. Отсюда, конечно, следует, что большинство сфер Бира неполитопальны. Однако, ни одного конкретного примера неполитопальной сферы Бира человечество, по-видимому, не знает. Хотелось бы восполнить этот пробел.

6 Экзотический многочлен и алгебры с двойственностью Пуанкаре

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов, интересующихся алгеброй и комбинаторикой

Пусть P — однородный многочлен степени n. Каждому такому многочлену можно сопоставить набор натуральных чисел

$$(d_0, d_1, ..., d_n)$$

где d_k есть размерность векторного пространства, порожденного всеми частными производными порядка k от P. В качестве минимальной необходимой программы, в курсовой надо разобраться, почему $d_k = d_{n-k}$ (т.е. числа d_k образуют палиндром). Доказательства опираются на понятия алгебры с двойственностью Пуанкаре, и двойственности Маколея.

Далее надо явно выписать пример экзотического многочлена. Оказывается, что если случайно выбрать многочлен P, то полученный по нему набор чисел d_i является унимодальным, т.е. эти числа вначале возрастают, потом, соответственно, убывают. Однако существуют экзотические многочлены, для которых это не так. Надо явно выписать хотя бы один такой многочлен, пользуясь конструкцией двойственности Маколея и алгебраической конструкцией Ричарда Стенли.

7 Введение в формулы локализации

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов, понимающим, что такое кратный интеграл Римана

Формулы эквивариантной локализации часто используются в топологии и математической физике. Эти формулы позволяют сводить вычисление интегралов по многообразиям большой размерности к интегрированию по определенным подмногообразиям. В курсовой нужно будет разобраться с простой версией этих формул, не требующей понимания, что такое многообразие.

Требуется разобрать алгоритм точного интегрирования многочлена по многограннику. В содержательной (т.е. наименее очевидной) части этого алгоритма, интеграл по многограннику заменяется на суммирование определенных рациональных выражений по вершинам многогранника, что является элементарным случаем формулы локализации. Нужно будет понять, откуда такие формулы берутся. Доказывать их можно по-разному, однако любое доказательство будет полезным для общего математического развития.

8 Матроиды и трехдиагональные матрицы

Тема рекомендована студентам магистратуры

Имеется два близких объекта: пермутоэдрическое многообразие (оно же торическое многообразие типа A_n — торическое многообразие, веер которого образован камерами Вейля типа A_n) и многообразие эрмитовых трехдиагональных матриц с заданным простым спектром. Их кольца когомологий имеют одинаковую аддитивную структуру, но различное умножение.

Кольцо когомологий торического многообразия типа A_n называется кольцом матроидов. В последнее время это кольцо обрело популярность благодаря работам Джуна Ха. Используя кольцо матроидов, он доказал несколько классических гипотез, включая элементарно формулируемую гипотезу о логарифмической вогнутости коэффициентов хроматического многочлена произвольного графа. В ходе курсовой работы нужно будет разобрать технику, развитую Джуном Ха, и постараться понять, можно ли какие-то из полученных в этой работе результатов получить, используя многообразие эрмитовых трехдиагональных матриц вместо пермутоэдрического многообразия. Иными словами, можно ли работать с матроидами, используя трехдиагональные матрицы?

9 Об одном специальном подпространстве в многообразии полных флагов

Тема рекомендована студентам магистратуры

Пусть F_n - многообразие, точками которого являются всевозможные представления $\mathbb{C}^n$ в виде прямой суммы ортогональных одномерных подпространств V_i. Это многообразие естественным образом отождествляется с многообразием полных флагов в $\mathbb{C}^n$.

Пусть A - диагональная матрица с различными числами на диагонали. Рассмотрим подпространство $Y_{n,A}$ в F_n, состоящее из разложений в сумму V_i, удовлетворяющих условию

$$A(V_i) \subset V_{i-1} \oplus V_i \oplus V_{i+1}.$$

Здесь предполагается, что нумерация индексов циклическая, то есть $V_{n+i} = V_i$. В ходе курсовой работы нужно будет разобраться с топологической структурой такого подпространства, которая, по всей видимости, связана, во-первых, с пермутоэдрическим многообразием, во-вторых, с пермутоэдрическим паркетом из кристаллографии.

В дальнейшем можно подумать, имеют ли какое-то отношение когомологии пространства $Y_{n,A}$ к матроидам или их обобщениям.

10 Комбинаторика клеточных разбиений многообразий

Тема рекомендована студентам магистратуры

Классическим объектом алгебраической комбинаторики являются h-числа симплициальных комплексов. Особенно хорошо теория h-чисел развита для триангулированных сфер: известно, что h-числа триангулированных сфер неотрицательны и образуют палиндром, а для выпуклых сфер — еще и унимодальны (что составляет содержание весьма нетривиальной g-теоремы). Из теории h-чисел выросли два обобщения:

1. Флаговые h-числа. Используются для изучения произвольных клеточных разбиений сфер вместо триангуляций. Например, они применяются при исследовании комбинаторики произвольных выпуклых многогранников, не обязательно симплициальных.

2. h''-числа, эта теория возникла относительно недавно. Возникают при изучении триангуляций произвольных многообразий вместо сфер.

Варианты тем для курсовых

10.1 Флаговые h''-числа многообразий

В ходе курсовой работы предлагается как минимум изучить все вышеперечисленное. Как максимум, попытаться скрестить эти две науки и ответить на вопрос: существует ли осмысленная теория флаговых h''-чисел клеточных разбиений многообразий?

10.2 cd-индекс и производные категории

В науке о флаговых числах возникает понятие cd-индекса — специального некоммутативного многочлена, кодирующего комбинаторику клеточного разбиения сферы. Неотрицательность коэффициентов cd-индекса выпуклого многогранника была доказана Стенли комбинаторным методом. Неотрицательность была позже доказана и для общих сфер, однако, для этого приходится применять довольно продвинутую гомологическую алгебру. Нужно разобраться в этом доказательстве.

11 Пространство орбит многообразия полных флагов и устойчивые гомологии

Тема рекомендована студентам магистратуры

Пусть F_n — многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^n$. На этом многообразии эффективно действует компактный тор T^{n-1}. Если $n = 3$, то пространство орбит такого действия гомеоморфно четырехмерной сфере. Для $n > 3$ ничего о пространстве орбит не известно (хотя, скорее всего, многообразием, даже топологическим, такое пространство уже не будет). Нужно описать пространство орбит хотя бы при $n = 4$. Или хотя бы описать его гомологии.

Один из необычных подходов к этой задаче таков: надо сгенерировать много точек в пространстве орбит и к полученному облаку данных применить алгоритм вычисления устойчивых гомологий. Это не даст точный ответ, но продемонстрирует, насколько осмысленно применять алгоритмы прикладной топологии к численному решению теоретических задач подобного плана.

12 Потоки на многообразиях Хессенберга и многообразиях ступенчатых матриц

Тема рекомендована студентам магистратуры

Функция Хессенберга — это комбинаторный объект, фактически эквивалентный пути Дика. Каждой функции Хессенберга h можно сопоставить неособое алгебраическое подмногообразие Y_h в многообразии полных флагов в $\mathbb{C}^n$, называемое полупростым регулярным многообразием Хессенберга. С другой стороны, каждой функции Хессенберга можно сопоставить многообразие X_h изоспектральных эрмитовых матриц, ступенчатая форма которых определяется функцией

h. Многообразия X_h и Y_h, вообще говоря, различны, однако имеют много общего. Поэтому мы называем их двойниками.

Как гладкость X_h, так и неособость Y_h, по сути, доказываются при помощи одинаковой идеи. В случае алгебраического многообразия Y_h используется метод Бялыницкого-Бируля, сводящий доказательство гладкости к проверке конечного числа точек. Многообразие X_h алгебраическим не является, и к нему метод Бялыницкого-Бируля не применим, однако на нем действует известная динамическая система, поток Тоды. С помощью этого потока опять же можно свести доказательство гладкости лишь к конечному числу точек — предельным точкам динамической системы. Требуется разобраться в теории, и понять, существует ли явное соответствие между потоком Тоды на X_h и потоком Бялыницкого-Бируля на Y_h.

13 Матричный двойник нильпотентного многообразия Хессенберга

Тема рекомендована студентам магистратуры

Функция Хессенберга — это комбинаторный объект, фактически эквивалентный пути Дика. Каждой функции Хессенберга h можно сопоставить неособое алгебраическое подмногообразие Y_h в многообразии полных флагов в $\mathbb{C}^n$, называемое полупростым регулярным многообразием Хессенберга. С другой стороны, каждой функции Хессенберга можно сопоставить многообразие X_h изоспектральных эрмитовых матриц, ступенчатая форма которых определяется функцией h. Многообразия X_h и Y_h, вообще говоря, различны, однако имеют много общего. Поэтому мы называем их двойниками.

Помимо полупростого многообразия Хессенберга, можно определить нильпотентное многообразие Хессенберга. Про нильпотентные многообразия Хессенберга известно множество удивительных фактов: например, их алгебры когомологий являются алгебрами с двойственностью Пуанкаре, хотя сами алгебраические многообразия особые. Имеется также (весьма таинственная) взаимосвязь между алгебрами когомологий полупростых и нильпотентных многообразий Хессенберга.

У нильпотентного многообразия Хессенберга тоже есть матричный двойник, который на данный момент вообще не изучен. Хотелось бы понять, можно ли перенести результаты о нильпотентных многообразиях Хессенберга на их матричных двойников?

14 Вокруг теоремы Кейпера-Масси

Тема рекомендована студентам магистратуры, либо студентам бакалавриата, знающим основы топологии и понимающим, что такое неособая торическая поверхность

Теорема Кейпера-Масси утверждает, что фактор CP^2 по комплексному сопряжению гомеоморфен 4-мерной сфере. Это можно доказать топологически, а можно извлечь из простого геометрического рассуждения в духе линейной алгебры первого курса. Такое доказательство было найдено и популяризовано Арнольдом, хотя было известно и до него.

Оказывается, если заменить проективную плоскость на любую неособую компактную торическую поверхность, то утверждение останется верным: фактор по комплексному сопряжению гомеоморфен 4-сфере. Хочется попытаться найти простое геометрическое объяснение этому факту в духе Арнольда.

15 Гомологии, статистика и моделирование мозга

Тема рекомендована студентам магистратуры, желающим сдвинуться в сторону прикладной математики

В ходе курсовой работы нужно будет научиться основным методам прикладной топологии, и попробовать применить их к реальным данным, полученным при исследовании мозга. В этом году планируется совместный семинар, на котором специалисты по геометрии, топологии, статистике и нейронауке постараются найти общие точки соприкосновения и наметить возможности совместной работы. В этой активности можно поучаствовать и узнать много нового.