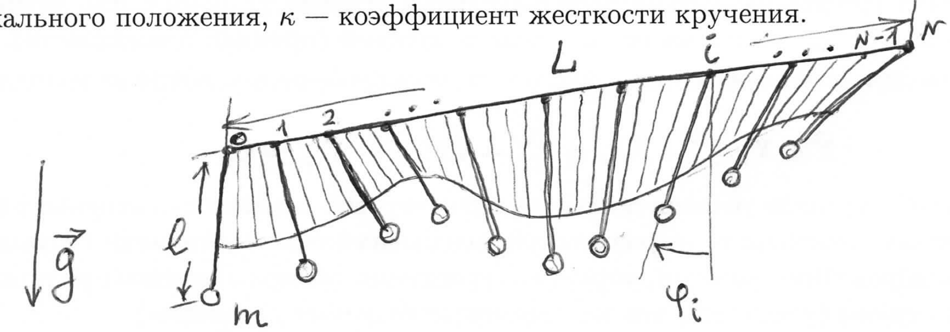
Классическая теория поля 2018.

Листок 3. Основные понятия и математические приемы в теории поля.

Срок сдачи: до 14 ноября

---

1. На натянутом горизонтально резиновом жгуте фиксированной длины L закреплены на равных расстояниях друг от друга N одинаковых маятников. Маятники представляют собой невесомые стержни длины ℓ с точечной массой m на конце, и под действием силы тяжести они могут колебаться в плоскости перпендикулярной направлению жгута (см. рисунок). При этом жгут испытывает упругую деформацию кручения, потенциальная энергия которой имеет вид $U_{\text{круч.}} = \sum_i \frac{\kappa}{2}(\phi_{i+1} - \phi_i)^2$, где ϕ_i — угол отклонения i-го маятника от вертикального положения, κ — коэффициент жесткости кручения.



а) Запишите лагранжиан этой дискретной системы. Осуществите предельный переход $N \to \infty$ к непрерывной полевой модели, сделав разумные предположения о предельном поведении параметров ℓ, m и κ. Выпишите лагранжеву плотность и действие этой полевой модели в общем случае и в пределе малых колебаний маятников.

б) Для предельной модели малых колебаний, применив принцип наименьшего действия, найдите уравнения движения и определите граничные условия в двух случаях:

1. концы жгута жестко закреплены;
2. концы жгута свободно болтаются (закреплены только в верхних точках).

2. **Модель свободной релятивистской струны** задается действием

$$S[X^\mu(\tau,\sigma)] = -\int d\tau d\sigma \sqrt{(\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu)^2 - (\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu)(\partial_\sigma X^\nu \partial_\sigma X_\nu)}.$$

Здесь $X^\mu(\tau,\sigma)$, $\mu = 0,1,2,3$ — координаты, задающие *мировую поверхность* релятивистской струны в пространстве Минковского (аналогично тому, как $x^\mu(\tau)$ задают мировую линию релятивистской частицы). Параметры τ и σ, соответственно, времени- и пространственно-подобны, то есть

$$\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu \geq 0 \quad \text{и} \quad \acute{X}^\mu \acute{X}_\mu \leq 0, \qquad (*)$$

где мы обозначили $\dot{X} = \partial_\tau X$, $\acute{X} = \partial_\sigma X$. При этом X^0 интерпретируется как время: $X^0(\tau,\sigma) = t$ [1], а $\vec{X}(\tau,\sigma)$ задает положение струны в пространстве в момент времени t.

а) Убедитесь, что требование положительности подкоренного выражения в действии $S[X^\mu]$ эквивалентно наличию двух независимых светоподобных касательных векторов в каждой точке мировой поверхности струны.

б) Обозначим символом $\mathcal{L}_\mu$ левую часть уравнения Эйлера-Лагранжа, получающуюся при

---

[1] Здесь мы для простоты полагаем скорость света $c = 1$, так что времениподобный параметр τ и пространственноподобный параметр σ имеют одинаковую размерность, чем мы неявно пользуемся в пункте г) при наложении калибровочных условий.

вариации действия по полю $X^\mu(\tau,\sigma)$. Проверьте, что из четырех выражений $\mathcal{L}_\mu$ только два независимы в силу тождеств

$$\dot{X}^\mu \mathcal{L}_\mu \equiv 0, \qquad \acute{X}^\mu \mathcal{L}_\mu \equiv 0.$$

в) Убедитесь, что если набор функций $X^\nu(\tau,\sigma)$ является решением уравнений Эйлера-Лагранжа $\mathcal{L}_\mu = 0$, то для любой обратимой замены параметров $\{\tau,\sigma\} \mapsto \{f(\tau,\sigma), g(\tau,\sigma)\}$ функции $X^\nu_{f,g} := X^\nu(f(\tau,\sigma), g(\tau,\sigma))$ также являются решением уравнений Эйлера-Лагранжа. Пользуясь этим произволом в параметризации мировой поверхности струны, можно построить множество решений уравнений Эйлера-Лагранжа с одинаковыми начальными данными. Такой произвол называют *калибровочным.* Физическая интерпретация динамики в этой и подобных моделях требует наложения дополнительных условий на поля с тем, чтобы динамика их однозначно определялась начальными условиями (принцип причинности).

г) Наложим два дополнительных, так называемых, *калибровочных* условия на координаты струны:

$$(\dot{X} + \acute{X})^\mu (\dot{X} + \acute{X})_\mu \,=\, (\dot{X} - \acute{X})^\mu (\dot{X} - \acute{X})_\mu \,=\, 0.$$

Заметим, что в силу а) такие условия допустимы для мировой поверхности струны, а ввиду б), в) они позволяют уменьшить нефизическую неоднозначность в динамике струны. Используя эти калибровочные условия, упростите уравнения Эйлера-Лагранжа релятивистской свободной струны (убедитесь, что это свободные волновые уравнения).

д) Пользуясь принципом наименьшего действия, определите граничные условия для концов струны $\sigma = 0, L$ в случаях

1. *открытой струны*: ее концы двигаются свободно;
2. *замкнутой струны*: ее концы соединены $X^\mu(\tau,0) = X^\mu(\tau,L)$.

е) Постройте общее решение задачи Коши для свободной релятивистской струны, открытой и замкнутой, в калибровке из пункта г) (формула Даламбера). Обратите внимание, какие дополнительные условия на начальные данные задачи Коши накладываются граничными условиями пункта д), калибровочными условиями пункта г) и физическими условиями (*), наложенными при формулировке задачи.

ж) Рассчитайте динамику специальных конфигураций струны:

1. Замкнутая струна в начальный момент времени покоится в плоскости (X^1, X^2) и имеет форму круга.
2. Открытая струна в начальный момент времени имеет форму прямой палки и вращается в плоскости (X^1, X^2) (уточните начальные данные сами).

Математическое отступление: задачи про обобщенные функции

Напомним, что дельта-функцией Дирака, сосредоточенной в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, называется линейный непрерывный функционал δ_{x_0} на пространстве основных функций $\mathcal{D}$ (бесконечно дифференцируемых с компактным носителем, см. записки Лекции 7), действующий по правилу

$$\delta_{x_0}[f] = f(x_0).$$

С функционалом δ_{x_0} удобно обращаться как с ядерным функционалом, вводя фиктивное ядро – *дельта-функцию* $\delta(x - x_0)$, и записывая его действие в виде интеграла

$$\delta_{x_0}[f] \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0).$$

3. Докажите следующие равенства:

а)

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \quad \forall\, a \in \mathbb{R}\setminus 0, \ \ a \neq 0.$$

Пусть $f(x)$ - дифференцируемая функция, причем уравнение $f(x) = 0$ имеет решения x_i, $i = 1, \ldots, n$, такие что $f'(x_i) \neq 0\ \forall\, i$. Тогда

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x - x_i).$$

б)

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\sin Rx}{x} = \pi\, \delta(x).$$

Здесь предел понимается в слабом смысле, т.е. как предел линейных функционалов на пространстве основных функций $\mathcal{D}$. Пользуясь этой формулой, получите равенство

$$\delta(x) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{ipx}\,\frac{dp}{2\pi}.$$

Символически этот предел записывается в виде

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx}\,\frac{dp}{2\pi}$$

и назвается преобразованием Фурье дельта-функции.

4. Пусть кусочно-гладкая функция $f(x)$ имеет разрывы первого рода (конечные скачки) в точках x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Запишите обобщенную производную функции $f(x)$ с помощью дельта-функций. Проиллюстрируйте общую формулу, найдя производную кусочно-гладкой функции следующего вида:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ x^2 + 2 & x \geq 1. \end{cases}$$

5. Докажите, что функция $f(r) = 1/|\vec{r}|$ удовлетворяет уравнению Пуассона с дельтаобразной правой частью:

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r}|} = -4\pi\, \delta^{(3)}(\vec{r}).$$

Здесь Δ — дифференциальный оператор Лапласа в пространстве $\mathbb{R}^3$, $\delta^{(3)}(\vec{r})$ — трехмерная дельта-функция.

---

6. Рассмотрим свободное вещественное скалярное поле $\phi(x^\mu) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\,\phi^2$$

в 4-мерном пространстве Минковского. Разложим решение уравнения Эйлера-Лагранжа этой модели – $\phi(x^\mu)$ – в сумму положительно и отрицательно частотных компонент (эта процедура обсуждается на лекциях, см. записки Лекции 7):

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x), \qquad \phi^\pm(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, a^\pm(\vec{p})\, \frac{e^{\pm ip\cdot x}}{2p^0}\Big|_{p^0=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}, \qquad \text{где } p\cdot x := p^\mu x_\mu.$$

Выразите сохраняющийся 4-вектор энергии-импульса P^μ поля ϕ в терминах амплитуд $a^{\pm}(\vec{p})$. Напоминание: $P^\mu = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x T^{0\mu}$, где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса поля.

7. В двумерном пространстве Минковского с координатами x^0 и x^1 и метрикой $g = \mathrm{diag}(1, -1)$ рассмотрим скалярное вещественное поле с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{\beta^2}\,(1 - \cos(\beta\,\phi)).$$

а) Найдите частное решение уравнений движения для поля ϕ в виде бегущей вправо волны $\phi(x) = f(x^1 - vx^0)$ такое, что $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - f(-x)) = 2\pi/\beta$.

б) Вычислите энергию и импульс найденного в пункте а) решения.

8. Рассмотрим систему 2 свободных комплексных скалярных полей $\phi_i(x), i = 1, 2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{Z}$ с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{2} \partial_\mu\overline{\phi_i}\,\partial^\mu\phi_i.$$

Помимо пространственно-временных симметрий (т.е., группы Пуанкаре) эта модель имеет другие симметрии, связанные с наличием в модели нескольких идентичных полей и называемые *внутренними*. Определите группу внутренних симметрий модели и найдите соответствующие сохраняющиеся токи.