

Куюмжиян Каринэ

karina@mccme.ru

1 Вееры, многогранники и кусочно-линейные функции

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Предлагается изучить комбинаторную сторону жизни торических многообразий: конусы и веера в решётках, построение веера по многограннику, кусочно-линейные функции на веерах, симплицальные конусы. Многие задачи могут быть сформулированы чисто комбинаторно, но при этом иметь геометрический смысл. Их можно попробовать решить самостоятельно, а можно изучить по книгам (Fulton, Introduction to Toric Varieties; Cox, Little, Schenck, Toric Varieties; Grünbaum, Convex Polytopes).

2 Системы корней

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Построение систем корней как множеств векторов, удовлетворяющих определённому набору аксиом. Классификация. Построение соответствующих диаграмм Дынкина. Решётки корней и весов. Построение множества весов представления с данным старшим весом. Большая часть понятий может быть изучена без дополнительных знаний. Требуется уметь работать с векторами и матрицами. Литература: Хамфрис, Введение в теорию алгебр Ли и их представлений, глава III.

3 Нигде не нулевые потоки в графах

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Рассмотрим конечный ориентированный граф. *Нигде не нулевым потоком* на этом графе называется такая расстановка ненулевых целых чисел на рёбрах, что для каждой вершины сумма чисел на входящих в неё рёбрах равна сумме чисел на исходящих из неё рёбрах. *Нигде не нулевым k -потоком* называется такая расстановка на рёбрах ненулевых целых чисел из отрезка $[-k + 1, k - 1]$ с условием, что для каждой вершины сумма чисел на входящих в неё рёбрах минус сумма чисел на исходящих из неё рёбрах равна нулю. Необходимым условием существования нигде не нулевого потока является отсутствие в графе (рассмотренном без учёта ориентации) мостов. Несложно доказать, что это условие является достаточным для существования нигде не нулевого потока.

Верно и более сильное утверждение – на любом графе без мостов можно построить 6-поток. Также известно, что на графе Петерсена не существует 4-потока. Открытый вопрос – на любом ли графе без мостов существует 5-поток?

Студентам предлагается либо самостоятельно построить доказательства существования k -потока для какого-либо $k \geq 5$, либо разобраться в имеющихся доказательствах: исторически первая статья про существование 8-потоков F. Jaeger, Flows and Generalized Coloring Theorems in Graphs, J. Combinatorial Theory Ser. B 26 (1979) 205-216; статья про существование 6-потоков P.D. Seymour, Nowhere-Zero 6-Flows, J. Combinatorial Theory Ser. B 30 (1981) 130-135.