

- 1 Принцип наименьшего действия
- 2 Законы сохранения
- 3 Интегралы движения и задача Кеплера
- 4 Уравнения Гамильтона
- 5 Скобки Пуассона
- 6 Примеры пуассоновых многообразий

6.1 Пуассоновы многообразия: напоминание

Обратимся теперь к содержательным примерам Пуассоновых многообразий. Поскольку мы уже предъявили скобку пуассона на симплектическом многообразии, то ясно, что любое симплектическое многообразие является Пуассоновым.

- Четномерное евклидово пространство $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2N}$. Простейший вариант фазового пространства с канонической симплектической структурой $\omega = \sum_{j=1}^N dp_j \wedge dq_j$ или скобкой Пуассона $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$, т.е. глобально заданным постоянным пуассоновым бивектором Ω^{ij} с матричными элементами $0, \pm 1$. Вспомнив именно эту формулу Дирак наконец сформулировал каноническую формулировку квантовой механики, в которой скобки Пуассона *канонических* координат заменяются на коммутаторы, и при этом алгебра функций $Fun(\mathcal{M})$ на фазовом пространстве становится некоммутативной.
- В большой степени все это переносится на кокасательные расслоения $\mathcal{M} = T^*M$, и даже на любое симплектическое пространство \mathcal{M}_ω . Пуассонов бивектор задается обратной матрицей симплектической формы $\Omega = \omega^{-1}$, и все свойства скобки Пуассона выполня-

ются. Главное нетривиальное – соотношение

$$\sum_i (\Omega^{ki} \partial_i \Omega^{nj} + \Omega^{ji} \partial_i \Omega^{kn} + \Omega^{ni} \partial_i \Omega^{jk}) = 0 \quad (1)$$

эквивалентно условию замкнутости $d\omega = 0$ симплектической формы.

6.2 Первый несимплектический пример

Однако можно поставить более общую задачу: найти *все* нетривиальные решения уравнений Якоби (1) и назвать соответствующие многообразия, оснащенные бивектором Ω^{ij} пуассоновыми. Немедленный вопрос: можно ли найти решения *не* отвечающие симплектическим многообразиям \mathcal{M} ?

Ответ на этот вопрос дает уже совсем простой пример. Рассмотрим евклидово пространство \mathbb{R}^3 и попытаемся определить на нем скобку Пуассона формулами

$$\begin{aligned} \{x, y\} &= -\{y, x\} = z \\ \{y, z\} &= -\{z, y\} = x \\ \{z, x\} &= -\{x, z\} = y \end{aligned} \quad (2)$$

(вообще в дальнейшем антисимметричность будем подразумевать автоматически!) или

$$\{x_i, x_j\} = \epsilon_{ijk} x_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3)$$

с помощью полностью антисимметричного тензора в \mathbb{R}^3 . С помощью “тождества Лейбница” продолжим эти соотношения на все (полиномиальные?) функции на \mathbb{R}^3 , или попросту напомним

$$\{f, g\} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} x_k \partial_i f \partial_j g \quad (4)$$

т.е. $\Omega^{ij} = \sum_k \epsilon_{ijk} x_k$ является линейной функцией координат. Соотношения Якоби (1) превращаются в

$$\begin{aligned} \sum_i (\Omega^{ki} \partial_i \Omega^{nj} + \Omega^{ji} \partial_i \Omega^{kn} + \Omega^{ni} \partial_i \Omega^{jk}) &= \\ = \sum_{l,i} x_l (\epsilon_{lki} \epsilon_{inj} + \epsilon_{lji} \epsilon_{ikn} + \epsilon_{lni} \epsilon_{ijl}) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

которые выполняются в силу тождеств

$$\sum_i (\epsilon_{lki}\epsilon_{inj} + \epsilon_{lji}\epsilon_{ikn} + \epsilon_{lni}\epsilon_{ijl}) = 0 \quad (6)$$

для антисимметричного тензора. Таким образом, мы получили, что

- Евклидово пространство \mathbb{R}^3 является *пуассоновым многообразием* – в наиболее общем смысле этого слова (скобка (3) удовлетворяет всем аксиомам для скобок Пуассона).
- Это пуассоново многообразие *не* является симплектическим, матрица Пуассонова бивектора

$$\|\Omega\| = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

очевидно вырождена $\det \Omega = 0$ и имеет $\text{rank } \Omega = 2$.

В чем главное отличие этого примера от симплектических многообразий? Легко экспериментально установить и следующий факт: на пуассоновом многообразии \mathbb{R}^3 существуют функция *Казимира* $C = \sum_i x_i^2 = x^2 + y^2 + z^2$ обладающая свойством

$$\{C, x_i\} = 0, \quad \forall i \quad (8)$$

т.е. находящаяся в пуассоновой инволюции с *любой* функцией¹ на \mathbb{R}^3 . Отметим сразу терминологический момент: иногда происходит путаница между функциями Казимира (или “казимирами”) и интегралами движения (или “гамильтонианами”) – последние находятся в инволюции с Гамильтонианом $\{H_i, H\} = 0$ или в более общем интегрируемом контексте – между собой $\{H_i, H_j\} = 0$, но вовсе не со всеми функциями на пуассоновом многообразии.

¹Можно ли построить подобную нетривиальную функцию на симплектическом многообразии?

6.3 Структура пуассоновых многообразий

Что это означает? Поскольку функция Казимира “является числом”, то посмотрим на ее “линии уровня”

$$C(x) = \sum_i x_i^2 = J^2 \quad (9)$$

представляющие собой семейство концентрических сфер вокруг начала координат в \mathbb{R}^3 . Таким образом, зафиксировав значение функции Казимира мы сядем на некоторое подмногообразие в \mathbb{R}^3 , а меняя ее значения – получим некоторую *стратификацию* пуассонова многообразия.

Легко видеть, что гамильтоновы векторные поля для любой функции $f \in Fun(\mathbb{R}^3)$ касательны к линии уровня $C = J^2$ в силу

$$0 = \{C, f\} = \sum_{i,j} \Omega^{ij} \partial_i C \partial_j f = \xi_f C = \sum_i \xi_f^i \frac{\partial C}{\partial x^i} \quad (10)$$

т.е. значение функции Казимира постоянно вдоль любых гамильтоновых потоков. Таким образом можно ограничить гамильтонову динамику на такие подмногообразия. Более точно теорема Ли говорит о том, что любое Пуассоново многообразие допускает стратификацию на *симплектические листы*. Пуассонову структуру в \mathbb{R}^3 можно ограничить на подмногообразии $\mathcal{M}_J \subset \mathbb{R}^3$, очевидно, что $\dim \mathcal{M}_J = 2$ ².

В данном случае это сделать совсем легко, достаточно переписать одно из соотношений (2), например $\{x, y\} = z$ в сферических координатах (для простоты $J = 1$)

$$\begin{aligned} x &= \sin \theta \cos \phi, & y &= \sin \theta \sin \phi, & z &= \cos \theta \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \phi} - \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \{\theta, \phi\} &= \{x, y\}|_{J=1} = z|_{J=1} = \cos \theta \end{aligned} \quad (11)$$

Вычисляя левую часть получим

$$\{\theta, \phi\} = \frac{1}{\sin \theta} \quad (12)$$

²Если не быть формалистом, а уж совсем точно $\dim \mathcal{M}_J = 2$ при $J \neq 0$, и $\dim \mathcal{M}_J = 0$ при $J = 0$.

т.е. \mathcal{M}_J является симплектическим многообразием с невырожденной замкнутой 2-формой $\omega = \sin \theta d\phi \wedge d\theta$.

Задача: Провести эту процедуру, называемую гамильтоновой редукцией, научным образом.

Замечание: На формулу (6) можно смотреть как на тождество для структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3$ вращений трехмерного пространства. Формулы последних двух разделов имеют естественное обобщение, называемое конструкцией Кириллова-Костанта.

Вместо евклидова пространства \mathbb{R}^3 в общем случае имеется векторное пространство двойственной алгебры Ли – линейных функционалов на \mathfrak{g}

$$\mathfrak{g}^* \simeq \mathbb{R}^{\dim \mathfrak{g}} \quad (13)$$

на котором коммутационные соотношения в алгебре Ли

$$[t^i, t^j] = f_k^{ij} t^k, \quad i, j, k = 1, \dots, \dim \mathfrak{g} \quad (14)$$

задают скобку Пуассона, естественным образом записанную на координатах $\langle x^i, \xi_j \rangle = \delta_j^i$, на \mathfrak{g}^* , двойственным координатам $\sum_j \xi_j t^j = g(\xi) \in \mathfrak{g}$ на алгебре Ли, как

$$\{x^i, x^j\} = f_k^{ij} x^k, \quad i, j, k = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}^* \quad (15)$$

Для этой скобки можно проверить все свойства пуассоновости, тождество Якоби будет автоматически выполняться из-за соотношения на структурные константы, обеспечивающие тождество Якоби для алгебры Ли \mathfrak{g} .

Менее тривиальным утверждением является то, что симплектические листы являются орбитами ко-присоединенного действия группы G на \mathfrak{g}^* . Хотя в разобранным примере с $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{so}(3)^* = \mathbb{R}^3$ и это очевидно: сферы как раз и возникают в результате вращения любого вектора длины J вокруг начала координат.

6.4 Сфера как фазовое пространство

Обычное фазовое пространство классической теории является кокасательным расслоением T^*M с симплектической формой

$$\omega = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j, \quad d\omega = 0 \quad (16)$$

где $n = \dim \mathcal{M}$, $\{q_1, \dots, q_n\}$ - координаты на \mathcal{M} , а $\{p_1, \dots, p_n\}$ - координаты в слое. Симплектической форме (16) отвечает скобка Пуассона $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$, естественным образом продолжаемая на функции $\{f(q, p)\} \in \text{Fun}(T^*M)$.

Однако для *квантовой* (маленькой!) системы симплектическое фазовое пространство не обязано быть кокасательным расслоением. Мы уже рассмотрели пример простейшего компактного фазового пространства - двумерной сферы

$$\begin{aligned} S^2 : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= J^2 \\ x_1 &= J \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = J \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = J \cos \theta \end{aligned} \quad (17)$$

с симплектической формой (теперь ее нормируем!)

$$\omega = \frac{1}{2J^2} \epsilon_{ijk} x_i dx_j \wedge dx_k = \frac{1}{2} J \sin \theta d\theta \wedge d\phi \quad (18)$$

которая в компактном случае должна удовлетворять условию целочисленности

$$\int_{S^2} \omega = 4\pi J \in 2\pi\mathbb{Z} \quad (19)$$

т.е. “спин” J обязан быть полуцелым.

Откуда берется это условие? Его можно получить и “чисто классическим” образом: давайте решим какую-нибудь динамическую задачу. Отвечающая (18) скобка Пуассона имеет вид

$$\{x_i, x_j\} = \epsilon_{ijk} x_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (20)$$

совпадающий со структурой алгебры Ли $su(2)$

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{S}_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (21)$$

для операторов вращения или спина, и может рассматриваться как ее классический предел.

Для гамильтониана $H = -x_3 = -J \cos \theta$ уравнения движения принимают вид

$$\dot{x}_1 = \{x_1, H\} = x_2, \quad \dot{x}_2 = \{x_2, H\} = -x_1, \quad \dot{x}_3 = 0 \quad (22)$$

или, в угловых координатах

$$\dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = 1 \quad (23)$$

т.е. он является просто генератором вращений вокруг третьей оси, а решениями уравнений движения являются траектории-“намотки”

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0, & 0 \leq \theta_0 \leq \pi \\ \phi(t) &= \phi_0 + t, & 0 \leq \phi_0 \leq 2\pi \end{aligned} \quad (24)$$

среди которых замкнутые на отрезке времени $0 \leq t \leq T$ удовлетворяют периодическим граничным условиям

$$\phi(T) = \phi_0 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (25)$$

На таких траекториях можно определить аналог классического действия

$$S = \int_0^T (\alpha_t - H dt) = J \int_0^T dt \left((1 - \cos \theta) \dot{\phi} + \cos \theta \right) \quad (26)$$

где α_t - вычисленная на траектории 1-форма $\alpha = J(1 - \cos \theta)d\phi$, такая что $d\alpha = \omega$, которая определена, вообще говоря, неоднозначно. Однако если траектория замкнута, то

$$\int_0^T \alpha_t = \oint_{\gamma} \alpha = \int_D \omega \quad (27)$$

где границей диска $\partial D = \gamma$ является замкнутый контур на сфере. Такой диск можно выбрать двумя способами, но разница сводится к $\int_{S^2} \omega$ по всей сфере, и поэтому в силу (19) величина $\exp(i \oint_{\gamma} \alpha)$ уже определена однозначно. В предельном случае, когда траектория стягивается к одному из двух полюсов, уже сам интеграл в (27) равен или нулю, или интегралу по всей сфере, и тогда выбор $\alpha = J(1 - \cos \theta)d\phi$ обеспечивает его целочисленность.

6.5 Пуассоновы многообразия Фока-Гончарова

Это специальный тип пуассоновых многообразий с квадратичной по переменным скобкой Пуассона.

Рассмотрим граф (или *колчан*) Γ - набор $|\Gamma|$ вершин, соединенных произвольным количеством ориентированных ребер (стрелок). В колчанах данного типа запрещаются только стрелки из любой вершины в себя. Припишем каждой вершине $I \in \Gamma$ (комплексную или вещественную, точнее – из \mathbb{C}^\times или \mathbb{R}_+) переменную x_I , $I = 1, \dots, |\Gamma|$, и будем на них смотреть как на некоторой карте $(\mathbb{C}^\times)^{|\Gamma|}$ пуассонова многообразия. На этих переменных определим *квадратичную* скобку Пуассона по формуле (в которой, естественно, нет никакого суммирования по индексам)

$$\{x_I, x_J\} = \Omega^{IJ}(x) = \varepsilon_{IJ} x_I x_J, \quad I, J = 1, \dots, |\Gamma| \quad (28)$$

где кососимметричная ε_{IJ} представляет собой матрицу смежности графа

$$\varepsilon_{IJ} = \#\text{arrows}(I \rightarrow J) - \#\text{arrows}(J \rightarrow I) \quad (29)$$

очевидно, что $\varepsilon_{IJ} = -\varepsilon_{JI}$. *Задача*: проверить для (30) тождество Якоби. В принципе в данном контексте в матрице (29) допускаются иногда не только целые (а например – полуцелые) значения.

В формуле (30) *нет* суммирования по I, J , т.е. в логарифмических переменных

$$\{\log x_I, \log x_J\} = \varepsilon_{IJ}, \quad I, J = 1, \dots, |\Gamma| \quad (30)$$

эта скобка постоянная.

Примеры:

- Многообразие Пуассона-Воронова $\{x_I, x_J\} = 0, \forall I, J$. Это многообразие очевидно не является симплектическим.
- Простейший нетривиальный граф из двух вершин, соединенных одной стрелкой. Соответствующая скобка $\{x, y\} = xy$ переходом в логарифмические координаты $x = e^q$ и $y = e^p$ превращается в каноническую $\{q, p\} = 1$.

Таким образом можно определить Пуассоново многообразие (точнее пока – его карту $(\mathbb{C}^\times)^{|\Gamma|}$), называемое X-кластерным многообразием Фока-Гончарова. Эти многообразия допускают ряд пуассоновых операций, т.е. отображений, сохраняющих пуассонову структуру

- Для любого подграфа $\Gamma' \subset \Gamma$ можно положить

$$\varepsilon_{IJ'} = 0, \quad \forall I \in \Gamma, \quad \forall J' \in \Gamma' \quad (31)$$

что отвечает просто “забвению” всех вершин графа Γ с переменными $\{x_{J'}\}$, $J' \in \Gamma'$.

- Склеивание двух графов Γ_1 и Γ_2 (или двух частей одного графа) путем *отождествления* (части) их вершин $\Gamma'_1 = \Gamma'_2 = \Gamma'$, получая новый граф

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_1 \setminus \Gamma'_1 \cup \Gamma' \cup \Gamma_2 \setminus \Gamma'_2 \quad (32)$$

с переменными $x_{I_1} = x_{I_1}^{(1)}$ во всех незатронутых вершинах $I_1 \in \Gamma_1 \setminus \Gamma'_1$, $x_{I_2} = x_{I_2}^{(2)}$ для $I_2 \in \Gamma_2 \setminus \Gamma'_2$, и произведениями $x_{I'} = x_{I'}^{(1)} x_{I'}^{(2)}$ для склеенных $I' \in \Gamma'$. Для матрицы смежности склеенного графа (32) можно написать

$$\begin{aligned} \varepsilon_{I_k J} &= \varepsilon_{I_k J}^{(k)}, \quad J \in \Gamma, \quad I_k \in \Gamma_k \setminus \Gamma'_k, \quad k = 1, 2 \\ \varepsilon_{I' J'} &= \varepsilon_{I' J'}^{(1)} + \varepsilon_{I' J'}^{(2)}, \quad I', J' \in \Gamma' \end{aligned} \quad (33)$$

При этом следует избавляться от всех стрелок типа \circlearrowleft .

Наконец, важнейшим пуассоновым преобразованием являются мутации, которые можно производить в каждой из вершин графа Γ .

- Пуассонова структура (30) сохраняется при *мутациях* графа и соответствующих преобразованиях x -переменных

$$\mu_J : \quad x_J \rightarrow \frac{1}{x_J}, \quad x_I \rightarrow x_I \left(1 + x_J^{\text{sgn}(\varepsilon_{IJ})}\right)^{\varepsilon_{IJ}}, \quad I \neq J \quad (34)$$

которые позволяют распространить скобку пуассона с данной карты на все кластерное многообразие. При этом

$$\begin{aligned} \mu_J : \quad \varepsilon_{IK} &\mapsto -\varepsilon_{IK}, \quad \text{if } I = J \text{ or } K = J, \\ \varepsilon_{IK} &\mapsto \varepsilon_{IK} + \frac{\varepsilon_{IJ}|\varepsilon_{JK}| + \varepsilon_{JK}|\varepsilon_{IJ}|}{2} \quad \text{otherwise} \end{aligned} \quad (35)$$

что легче пояснить “словами” на операциях с графами.

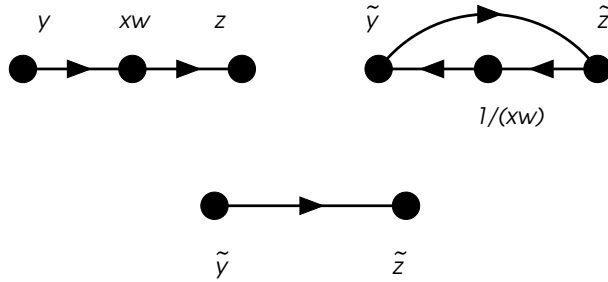


Рис. 1: Пример кластерного преобразования: склейка, а также мутация в склеенной вершине и последующее ее “забвение” порождают групповую структуру на пуассоновых графах определенного типа.

Пример пуассоновых преобразований приведен на картинке 1.

- Consider a multiplication $(y \rightarrow x) \cdot (w \rightarrow z) = y \rightarrow xw \rightarrow z$, according to the gluing rule.
- After mutating at the intermediate point, the variables according to (34) transform as

$$xw \rightarrow \frac{1}{xw}, \quad y \rightarrow y(1 + xw) = \tilde{y}, \quad z \rightarrow z \left(1 + \frac{1}{xw}\right)^{-1} = \tilde{z} \quad (36)$$

which corresponds to the second graph from fig. 1, with an extra arrow between \tilde{y} and \tilde{z} reflecting, that

$$\begin{aligned} \{\tilde{y}, \tilde{z}\} &= \left\{ y(1 + xw), z \left(1 + \frac{1}{xw}\right)^{-1} \right\} = \\ &= (1 + xw)z \left\{ y, \left(1 + \frac{1}{xw}\right)^{-1} \right\} + y \left(1 + \frac{1}{xw}\right)^{-1} \{(1 + xw), z\} = \\ &= yxwz = \tilde{y}\tilde{z} \end{aligned} \quad (37)$$

- Forgetting the intermediate vertex, as at fig. 1, one gets the original graph $\tilde{y} \rightarrow \tilde{z}$ but with the new variables in the vertices.

Какую мы получили группу?

Ответ: The simplest graph $y \rightarrow x$ corresponds to the subgroup of upper-triangular matrices in $SL(2)$ or $PGL(2)$ (sometimes it is easier just to forget about the determinant). More strictly, consider it as a short-hand notation for

$$y \xrightarrow[E]{} x = YEX = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yx & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

with the matrix in r.h.s. considered as an element of $PGL(2)$.

The rule to get them exactly corresponds to

$$\begin{aligned} \left(y \xrightarrow[E]{} x \right) \cdot \left(w \xrightarrow[E]{} z \right) &= \begin{pmatrix} yx & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} wz & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yxwz & y(1+xw) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{y}\tilde{z} & \tilde{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{Y}E\tilde{Z} = \tilde{y} \xrightarrow[E]{} \tilde{z} \end{aligned} \quad (39)$$

multiplication of the upper-triangular matrices.

Примерами пуассоновых кластерных многообразий являются группы Ли и пространства Тейхмюллера. Приведенным рассуждением мы продемонстрировали идею того, как кластерные координаты задаются на пуассоновых подмногообразиях в группах Ли.