Шамканов Данияр Салкарбекович

daniyar.shamkanov@gmail.com

1 Интуиционистская логика

Тема рассчитана на студентов 1–2 курсов.

Интуиционистское направление в логике и философии математики появилось в результате критики классической математики и логики, предпринятой в начале XX века голландским математиком Л.Э.Я. Брауэром в связи с обнаружением парадоксов в основаниях математики. Данная система представляет собой первую неклассическую логику, которая получается исключением принципа tertium non datur, т.е. закона исключенного третьего, из списка аксиом классической логики. Студененты могут познакомиться с различными аспектами семантики интуиционсисткой логики высказываний и с тем, какое отношение данная система имеет к лямбда-исчислению. В качестве более сложной темы предлагается освоить доказательство теоремы о полноте для интуичионистской логики предикатов относительно семантики Крипке.

1.1 Различные семантики интуичионистской логики высказываний.

1.2 Соответствие Карри-Говарда.

1.3 Семантика Крипке для интуичионистской логики предикатов.

2 Модальная логика

Тема рассчитана на студентов 1–2 курсов.

В модальной логике рассматриваются системы, содержащие наряду с обычными связками (конъюнкцией, дизъюнкцией, импликацией и пр.) также так называемые модальные операторы (необходимо, что ..., известно, что ..., доказуемо, что ... и др.). При выборе данной темы студенты могут познакомиться с базовыми подходами к семантике модальных логик, а также освоить базовые результаты, относящиеся к логике доказуемости Гёделя-Лёба, модальной системе, тесно связанной со второй теоремой Гёделя о неполноте.

2.1 Реляционная и тополгическая семантики модальной логики

2.2 Логика доказуемости Гёделя-Лёба

3 Вторая теорема Гёделя о неполноте

Тема рассчитана на студентов 2 курса.

Студентам предлагается освоить доказательство второй теоремы Гёделя о неполноте для эквационального варианта элементарной арифметики.

4 Логика свидетельств

Тема рассчитана на студентов 3–4 курсов и магистрантов, знакомых с основами модлаьной логики и формальной арифметики.

Логики свидетельств представляют собой семейство эпистемических логик, в которых модальную формулу $\Box A$ заменяют на $t : A$, интерпретируя данное выражение как "t является обоснованием (свидетельством) для A". Они стали интенсивно изучаться после работы С.Н. Артемова, сформулировавшего логику доказательств LP, в которой выражение $t : A$ интерпретируется как "t является доказательством A". С.Н. Артемов доказал теорему о корректности и полноте логики LP относительно арифметической семантики, а также установил теорему о реализации, связывающую логику доказательств LP и стандартную модальную логику $\mathsf{S4}$. Легко понять, что если в любой доказуемой в LP формуле заменить все подформулы вида $t : B$ на $\Box B$, то результат такого забывающего перевода доказуем в логике $\mathsf{S4}$. Теорема о реализации утверждает обратное: любая доказуемая в логике $\mathsf{S4}$ формула A может быть получена из доказуемой в LP формулы B с помощью забывающего перевода. При этом формула B называется реализацией модальной формулы A.

На данный момент для многих модальных логик были найдены связанные с ними логики свидетельств и доказаны соответствующие теоремы о реализации. Кроме того, обычно для доказуемой модальной формулы A удается установить существование не просто реализации, а так называемой нормальной реализации. Это означает, что реализация получена из формулы A заменой позитивных вхождений модальной связки $\Box$ на термы логики свидетельств, а негативных вхождений $\Box$ на различные переменные. Выражаясь неформально, в нормальной реализации формулы A термы-свидетельства, соответствующие позитивным вхождениям связки $\Box$, являются функциями от свидетельств, подставляемых вместо негативных вхождений $\Box$.

Студенту предлагается разобраться с логикой свидетельств JGL, соответствующей логике доказуемости Гёделя-Лёба GL, а также

- предложить семантику, относительно которой логика JGL будет полна;
- дать семантическое доказательство теоремы о реализации, связывающей логики GL и JGL;
- найти корректную арифметическую интерпретации для логики JGL.

.