

Мамаюсупов Худоёр

kmamayusupov@hse.ru

1 Почти-периодические функции

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов освоивших понятия непрерывности функции

Известно, что сумма двух непрерывных периодических функции не всегда является периодическим. Непривные периодические функции принимают свои максимальные значения. Если их сумма периодична то максимум не могут быть больше суммы максимумов. А если сумма не является периодической то сумма всегда имеет свой супремум который есть сумма максимумов слагаемых: $\sup\{f(x) + g(x)\} = \max(f) + \max(g)$. Кроме того сумма удовлетворяет свойством почти-периодичности.

Предлагается разобрать

а) когда сумма $f(x) + g(x)$ двух периодических функции есть периодическая функция (статья [1])?

б) верно ли что $\sup\{f(x) + g(x)\} = \max(f) + \max(g)$ когда $f(x)$ и $g(x)$ периодичны но имеют разрывы?

Для студентов 2 курса, и сверх того, заменить максимум на существенный максимум и рассмотреть измеримые функции или разобрать статью [2].

[1] John M. H. Olmsted and Carl G. Townsend, On the Sum of Two Periodic Functions, 1972.

[2] S. Mortola, R. Peirone, The sum of periodic functions, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 2-B (1999), n.2, p. 393–396.

[3] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953.

2 Динамика кубических произведений Бляшке на единичном диске

Тема рассчитана на студентов 3–4 курсов и магистрантов освоивших вводный курс комплексного анализа.

Рассмотрим для фиксированного $a \in \mathbb{D}$ дробно-линейный автоморфизмы β_a единичного круга (диска) $\mathbb{D}$ таких что $\beta_a(a) = 0$ и $\beta_a(1) = 1$. Тогда такой дробно-линейное автоморфизм единственен и имеет вид $\beta_a(z) = \frac{1-\bar{a}}{1-a} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ где $z = x+iy$ комплексное переменное. Предлагается исследовать динамику кубических произведений Бляшке определяемое равенством $B(z) = \beta_a(z)\beta_b(z)\beta_c(z)$, где a, b, c заранее определенные комплексные числа из $\mathbb{D}$.

а) изучать типы неподвижных точек, (где их находиться?) и критические точки на $\mathbb{D}$.

б) когда $z = 1$ является параболическим неподвижным точкам для $B(z)$ (производная $B'(1) = 1$) и существует единственная критическая точка в $z = 0$ с максимальное степени то это произведение Бляшке единственно и имеет канонический вид $B(z) = \frac{2z^3+1}{2+z^3}$. Если критическая точка не находится в центре круга то произведение Бляшке сопряжено к этому.

с) что происходит(найти канонический вид) если существует между двумя критическими точками орбитальные соотношения: их будущее орбиты пересекутся, т.е. для некоторых натуральных чисел $n > 0$ и $m > 0$ имеет место равенство $B^{on}(c_1) = B^{o(n+m)}(c_2)$ для критических точек $c_1 \neq c_2$. Разобрать случай $n = m = 1$ и $n = 1, m = 2$ и найти всех таких произведений Бляшке.

[1]. Милнор Дж., Комплексная динамика. Вводные лекции = Dynamics in One Complex Variable. Introductory Lectures.