Пахомов Федор Николаевич

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
pakhfn@gmail.com

1 Модели теории множеств

Аксиоматическая теория множеств ZFC, аналогично наборам аксиом, известным из алгебры (аксиомы групп, аксиомы полей и т.п.), может изучаться посредством рассмотрения структур удовлетворяющих этим аксиомам — моделей теории множеств. По всем конкретным темам смотри
Т. Йех. Теория множеств и метод форсинга. *М.: Мир*, 1973
T. Jech. Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded. Springer Monographs in Mathematics. *Springer Berlin Heidelberg*, 2006

1.1 Построение модели теории множеств на основе недостижимого кардинала

Тема рекомендована студентам 1–2 курса, реферативная

Из второй теоремы Гёделя о неполноте для случая теории множеств следует, что в ZFC нельзя доказать существование модели ZFC. Но есть расширения ZFC аксиомами, утверждающими, что существуют множества столь большой мощности, что в ZFC нельзя доказать их существование. Такие аксиомы известны как аксиомы больших кардиналов, среди них одной из наиболее слабых является аксиома существования недостижимого кардинала. Докажите, что из существования недостижимого кардинала следует существование модели теории множеств ZFC.

1.2 Построение моделей конечно аксиоматизируемых подтеорий ZFC

Тема рекомендована студентам 1–2 курса, реферативная)

Как упоминалось выше, в ZFC нельзя доказать существование модели всей теории ZFC. Докажите контрастирующее с этим утверждение о том, что для всякой конечно аксиоматизируемой подтеории ZFC, в самой теории ZFC доказуемо, что существует модель этой подтеории.

1.3 Конструктивный универсум и совместность континуум гипотезы

Тема рекомендована студентам 2 курса, реферативная

Докажите теорему Гёделя о том, что конструктивный универсум составляет класс-модель теории множеств в которой выполнена континуум гипотеза.

2 Счетные ординалы, недоказуемые комбинаторные утверждения и быстрорастущие функции

Теоремы Гёделя о неполноте дают примеры утверждений, которые нельзя ни доказать ни опровергнуть в данной формальной теории, но эти примеры неестественны с точки зрения обычной математической практики. Тем не менее, можно строить более естественные примеры такого рода. Вопросы о построение конкретных примеров недоказуемых в сильных теориях утверждений тесно переплетены с вопросами о счетных ординалах и быстрорастущих функциях.

2.1 Построение иерархий быстрорастущих функций из счетных ординалов

Тема рекомендована студентам 1–2 курса, реферативная

Есть несколько методов определения иерархий быстрорастущих функций из натуральных чисел в натуральные: расширенная иерархия Гжегорчика, иерархия Харди и определения через α-рекурсию. В данной работе предполагается разобраться в соотношение этих иерархий.
H.E. Rose. Subrecursion: Functions and Hierarchies. *Oxford University Press*, 1984

2.2 Теорема Гудстейна и ординал ε_0

Тема рекомендована студентам 1–2 курса, реферативная

Нужно доказать, теорему Гудстейна с использованием трансфинитной индукции по ординалу ε_0. Далее нужно вычислить значения функции Гудстейна в терминах функций из быстрорастущей иерархии. Материал о самой теоремы Гудстейна довольно легко найти. О связи с расширенной иерархией Гжегорчика можно прочесть в статье:
A. E. Caicedo. Goodstein's function. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 41(2):381–391, 2007

2.3 Теорема Париса-Харрингтона о недоказуемости в первопорядковой арифметике PA модификации конечной теоремы Рамсея

Тема рекомендована студентам 2 курса, реферативная

Нужно доказать теорему Рамсея и принцип Париса-Харрингтона, как ее следствие. Далее нужно доказать, что принцип Париса-Харрингтона недоказуем в PA. Это весьма сложная курсовая работа, которая потребует довольно глубокого освоения техники работы с нестандартными моделями арифметики. О теореме Париса-Харрингтона можно прочесть в обзоре Бовыкина, а освоить работу с нестандартными моделями арифметики можно по книге Кея:
A. Bovykin. Brief introduction to unprovability. Logic Colloquium 2006. Lecture Notes in Logic, 38–64, 2009
R. Kaye. Models of Peano Arithmetic. Oxford Logic Guides. 1991

2.4 Сравнение методов задания ординала Бахмана-Говарда

Тема рекомендована студентам 2–3 курса

Ординал Бахмана-Говарда — это большой счетный ординал, наиболее естественные определения которого используют так называемые функции ординального коллапса, которые проецируют несчетные ординалы на счетные. В некотором смысле, это столь большой счетный ординал, что для его задания по-существу требуются несчетные множества. В этой работе требуется сравнить системы ординальных обозначений, соответствующие разным определениям ординала Бахмана-Говарада на основе функций ординального коллапса.

2.5 Логики конечной ширины и ординалы

Тема рекомендована студентам 2–4 курса,магистрантам

Есть специальный класс модальных логик, известных как логики конечной ширины. Из результата К. Файна следует, что со всякой такой логикой можно связать счетный ординал. В этой работе требуется найти логики из этого класса соответствующие некоторым достаточно большим ординалам.

3 Слабые арифметики и теории множеств

Известны слабые формальные теории, которые связанны с некоторым классом сложности вычислений в следующем смысле: при некоторых услувиях, в таких теориях из доказательств существования некоторых объектов могут быть извлечены алгоритмы построения таких объектов, притом алгоритмы лежат в данно сложностном классе. Например, слабая арифметическая теория S^1_2 по теореме Басса соответствует классу алгоритмов, работающих за полиномиальное время.

3.1 Связь между разными формализмами для ограниченной арифметики

Тема рекомендована студентам 3–4 курса,магистрантам

Наряду с арифметикой Басса S^1_2 есть теория бинарных слов Феррейро Σ^b_1-NIA, которая также соответствует вычислимости за полиномиальное время. Среди специалистов по ограниченным арифметикам хорошо известно общее наблюдение о том, что эти две теории родственны и формализуют в разных языках один и тот же способ рассуждений. Тем не менее, точный характер связи между ними остается не до конца ясен. Очень сильной формой эквивалентности двух теорий сформулированных в разных языках является понятие дефиницальной эквивалентности, которое говорит что каждая из теорий погружает в себя другую путем первопорядковых определений и при том погружения взаимообратны. В данной работе предлагается проверить гипотезу о том, что S^1_3 и Σ^b_1-NIA дефиницально эквивалентны. Аналогичные вопросы также открыты для некоторых других формализмов для ограниченной арифметики.

Хотя данная задача предположительно не слишком сложна, но её решение потребует подробного изучения систем ограниченных арифметик.

3.2 Очень слабые теории множеств

Тема рекомендована студентам 1–3 курса

Есть ряд вопросов свзяанных с изучением свойств слабых теорий сформулированных в языке теории множеств. В частности вопросы о нахождение естественных примеров теорий множеств, которые аксиоматизируют определенные классы конечных моделей.