

Задачи для подготовки к контрольной по группам и алгебрам Ли

Контрольная состоится в четверг 8 ноября в 17:00 (вместо лекции).

1. Пусть G – группа обратимых линейных преобразований \mathbb{R}^n , сохраняющих упорядоченную пару несовпадающих одномерных подпространств. **а)** Найдите размерность группы Ли G . **б)** Найдите число компонент связности этой группы Ли.
2. **а)** Найдите все связные подгруппы Ли в группе аффинных преобразований прямой \mathbb{R} . **б)** Какие из них нормальны? **в)** Те же вопросы для группы $SU(2)$. **г)** Те же вопросы для группы $SO(4, \mathbb{R})$.
3. **а)** Найдите все связные компактные подгруппы Ли в группе собственных движений плоскости \mathbb{R}^2 . **б)** Какие из них нормальны? **в)** Те же вопросы для группы $SL(2, \mathbb{R})$.
4. Найдите образ экспоненциального отображения для группы Ли из задачи 1 при $n = 3$.
5. Трехмерная алгебра Ли \mathfrak{a} задана в базисе как $[x_1, x_2] = 2x_2$, $[x_1, x_3] = -x_3$, $[x_2, x_3] = 0$. **а)** Опишите какую-нибудь группу Ли с касательной алгеброй, изоморфной \mathfrak{a} . **б)** Найдите все идеалы в алгебре Ли \mathfrak{a} . **в)** Найдите центр универсальной обертывающей алгебры Ли \mathfrak{a} .
6. Пусть E, H, F – стандартный базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Найдите все собственные значения элемента $EFH \in U(\mathfrak{sl}_2)$ **а)** в присоединенном представлении алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 ; **б)** в четырехмерном неприводимом представлении алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 .
7. Приведите пример не вполне приводимого конечномерного представления группы Ли **а)** аффинных преобразований прямой; **б)** движений плоскости; **в)** группы Гейзенберга.
8. **а)** Докажите, что представление трехмерной алгебры Гейзенберга \mathfrak{h} (с соотношениями $[x, y] = z$, $[z, \cdot] = 0$) в пространстве $\mathbb{C}[t]$, заданное как $\rho(x)f(t) = f'(t)$, $\rho(y)f(t) = tf(t)$, $\rho(z)f(t) = f(t)$, – неприводимо. **б)** Найдите все собственные значения элемента $x^2y^2 \in U(\mathfrak{h})$ в этом представлении.