Эллиптические функции.

Тригонометрические функции являются периодическими: $f(x+T) = f(x)$, где $T = 2\pi$ если $f = \sin, \cos$; и $T = \pi$ если $f = \tan$. Для функций комплексной переменной можно рассмотреть более сильное условие двойной периодичности: $f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$.

В вещественном случае это условие бессодержательно, ибо если $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$, то, как показывают в алгебре, существует ω такая, что $f(z+\omega) = f(z)$ и $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{N}\omega$. то есть $f(z)$ периодична с одним периодом ω. Если $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то, как показывают в анализе, $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ всюду плотна в $\mathbb{R}\omega_1$ и условие двоякой периодичности вкупе, скажем, с непрерывностью влечет постоянность функции f.

Лемма 1. Голоморфная двоякопериодическая функция постоянна.

Доказательство. Рассмотрим фундаментальный параллелограмм $\Phi = \{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 | 0 \le \alpha, \beta \le 1\}$. Заметим что Φ замкнут и ограничен и, стало быть, компактен. Всякая точка $z \in \mathbb{C}$ может быть переведена сдвигом в Φ: $z + n\omega_1 + m\omega_2 \in \Phi, n, m \in \mathbb{Z}$, поэтому значения двоякопериодической функции f на всем $\mathbb{C}$ совпадают со значениями на Φ: $f(\mathbb{C}) = f(\Phi)$. Голоморфная функция f непрерывна и, следовательно, ограничена на компакте Φ. Значит, f ограничена на всем $\mathbb{C}$. По теореме Лиувилля она постоянна.

Определение 1 Двоякопериодическая функция f на $\mathbb{C}$ называется эллиптической, если она голоморфна на некоторой области , имеет только полюса как особые точки и число особых точек в фундаментальной области Φ конечно.

Существуют непостоянные эллиптические функции, что показывает следующий

Пример Пусть $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Рассмотрим ряд

$$\wp(z|\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left(\frac{1}{(z + m\omega_1 + n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right)$$

Лемма 2 Ряд $\wp(z|\omega_1, \omega_2)$ равномерно абсолютно сходится если z принадлежит ограниченному подмножеству $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2)$.

Доказательство. Пусть $|z| < M$. Выберем $C > 2M$. Тогда при описанных выше условиях на m или n, $|z + m\omega_1 + n\omega_2| > \frac{1}{2}|m\omega_1 + n\omega_2|$ и $|z^2 + 2z(m\omega_1 + n\omega_2)| < 2M|m\omega_1 + n\omega_2|$. используя очевидное равенство

$$\frac{1}{(z + m\omega_1 + n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} = \frac{-(z^2 + 2z(m\omega_1 + n\omega_2))}{(z + m\omega_1 + n\omega_2)^2(m\omega_1 + n\omega_2)^2},$$

Получаем равномерную оценку модуля общего члена ряда для больших m b n через $\frac{4M}{|m\omega_1 + n\omega_2|^3}$. Ряд с таким общим членом сходится, например, по интегральному признаку, так как интеграл

$$\int\int_{x^2+y^2>1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^3} = \int_{r>1}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \frac{r\mathrm{d}r}{r^3} = \int_{r>1} 2\pi \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

сходится на бесконечности.

Ряд для $\wp(z|\omega_1,\omega_2)$ сходится равномерно и абсолютно если z принадлежит ограниченному подмножеству $\mathbb{C}\setminus(\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2)$ и, стало быть определяет голоморфную функцию на $\mathbb{C}\setminus(\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2)$ с полюсами второго порядка в решетке $\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$

Ряд из почленных производных по z

$$\sum_{(m,n)} \frac{-2}{(z+m\omega_1+n\omega_2)^3}$$

также сходится абсолютно и равномерно в силу тех же оценок, поэтому он сходится к производной $\wp'(z|\omega_1,\omega_2)$, которая также голоморфна на $\mathbb{C}\setminus(\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2)$ и имеет полюсама третьего порядка в решетке $\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$.

Лемма 3 Функции $\wp(z|\omega_1,\omega_2)$ и $\wp'(z|\omega_1,\omega_2)$ двоякопериодичны.

Доказательство. Сначала докажем двоякую периодичность $\wp'(z|\omega_1,\omega_2)$. Сдвиг z на ω_1 эквивалентен замене индекса суммирования m на $m+1$. Поскольку ряд сходится абсолютно, эта замена суммирования не меняет сумму ряда. Для сдвига на ω_2 рассуждение аналогично

Производная $\wp'(z|\omega_1,\omega_2)$ функции $\wp(z|\omega_1,\omega_2)$ инвариантна относительно сдвигов. Поэтому $\wp(z|\omega_1,\omega_2)$ может при сдвиге лишь сдвинутся на константу: $\wp(z+\omega_j|\omega_1,\omega_2)=\wp(z|\omega_1,\omega_2)+c_i$. С другой стороны, замена знака z эквивалентна замене знаков переменных суммирования, что допустимо в силу абсолютной сходимости. Стало быть, $\wp(z|\omega_1,\omega_2)$ - четная функция переменной z. Комбинируя, получаем

$$c_j=\wp(z+\omega_j|\omega_1,\omega_2)-\wp(z|\omega_1,\omega_2)=\wp(-z-\omega_j|\omega_1,\omega_2)-\wp(-z|\omega_1,\omega_2)=-c_j,$$

и $\wp(z|\omega_1,\omega_2)$ двоякопериодична.

Для натурального $k\geq 4$ положим

$$e_k(\omega_1,\omega_2)=\sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^k}.$$

Оценка как при доказательстве Леммы 2 показывает что ряд сходится абсолютно и равномерно на ограниченных множествх, отделенных от нуля так как $k\geq 4$.

Лемма 4 Справедливо следующее разложение в ряд Лорана по переменной z:

$$\wp(z|\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{z^2}-\sum_{j=2}^{\infty}(j+1)e_{j+2}(\omega_1,\omega_2)(-z)^j.$$

Доказательство. Из формулы для суммы геометрической прогрессии при $|z|<|a|$ получаем $(a+t)^{-2}=\sum_0^\infty (j+1)(a)^{-(j+2)}(-t)^j$. Применяя эту формулу к общему члена ряда, определяющего $\wp$ для достаточно малых z получаем

$$\wp(z|\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \sum_{j=4}^{\infty} (j+1) \left(\frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^{j+2}} \right) (-z)^j.$$

Если мы докажем абсолютную сходимость этого тройного ряда, то допустимо переставить порядок суммирования по (m,n) и j. В результате получим

$$\wp(z|\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{z^2} + \sum_{j=4}^{\infty} (j+1) \left(\sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^{j+2}} \right) (-z)^j,$$

что и требовалось доказать.

Оценка модуля общего члена тройного ряда проводится следующим образом.

$$m\omega_1 + n\omega_2 = \omega_2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} m + n \right) = \omega_2 \left(\Re\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) m + n + i\Im\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) m \right),$$

$$|m\omega_1 + n\omega_2| = |\omega_2| \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} m + n \right| \geq |\omega_2| \left| \Im\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) m \right| = |\omega_2| \left| \Im\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \right| |m|,$$

так как модуль комплексного числа не меньше модуля его мнимой части. Получаем оценку:

$$\left| \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^{j+2}} (-z)^j \right| \leq \frac{1}{\left(|\omega_2| \left| \Im\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \right| |m| \right)^{j+2}} |-z|^j = \frac{1}{\left(|\omega_2| \left| \Im\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \right| \right)^2} \times$$

$$\left(\frac{|z|}{|\omega_2| \left| \Im\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \right|} \right)^j \frac{1}{|m|^{j+2}} \leq \frac{1}{\left(|\omega_2| \left| \Im\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \right| \right)^2} \left(\frac{|z|}{|\omega_2| \left| \Im\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \right|} \right)^j \frac{1}{|m|^4}.$$

Аналогично имеем оценку

$$\left| \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^{j+2}} (-z)^j \right| \leq \frac{1}{\left(|\omega_2| \left| \Im\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \right| \right)^2} \left(\frac{|z|}{|\omega_1| \left| \Im\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \right|} \right)^j \frac{1}{|n|^4}.$$

тем самым, если $C < \min | \left(\omega_1 | \left| \Im\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \right|, \omega_2 | \left| \Im\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \right| \right)$
тройной ряд для $\wp$ мажорируется рядом

$$\frac{1}{C^2} \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \sum_{j=4}^{\infty} (j+1) \left(\frac{|z|}{C} \right)^j \min\left(\frac{1}{|m|^4}, \frac{1}{|n|^4} \right).$$

Так ка общий член этого ряда раскладывается в произведение сомножителей, зависящих либо от j, либо от (m, n) Ряд является произведением соответствующих рядов и достаточно доказывать сходисть сомножителей.

$$\sum_{j=4}^{\infty}(j+1)\left(\frac{|z|}{C}\right)^j$$

сходится при $\frac{|z|}{C} < 1$, смотри начало лекции.

Для доказательства сходимости по парам (m, n) рассмотрим сумму по квадрату $\{(m, n)||m|, |n| \leq N$

$$\sum_{m=-N,n=-N,(m,n)\neq(0,0)}^{N,N} \min\left(\frac{1}{|m|^4}, \frac{1}{|n|^4}\right) = \sum_{K=1}^{N} \sum_{(m,n)|\max(|m|,|n|)=K} \frac{1}{|K|^4} =$$

$$\sum_{K=1}^{N} \frac{8K}{K^4} = 8\sum_{K=1}^{N} \frac{1}{K^3},$$

так как количество пар $(m, n)| \max(|m|, |n|) = K$ равно $8K$. Ряд обратных кубов сходится, что доказывает сходимость двойного ряда.

Ряды Лорана можно дифференцировать почленно, что позволяет вычислить ряд Лорана производной $\wp'$.

Теорема. справедливо следующая формула (уравнение Вейерштрасса).

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - 60e_4\wp - 140e_6.$$

Доказательство. Разность правой и левой частей голоморфна вне решетки $m\omega_1 + n\omega_2$. Элементарное вычисление с рядами Лорана показывает, что она голоморфна в точке 0, мало того, она там зануляется. По двоякой периодичности она голоморфна и в точках решетки $m\omega_1 + n\omega_2$. По теореме Лиувилля целая двоякопериодическая функция, равная нулю в одной точке тождественно равнв нулю.

Пусть $m > C\left(\Im(\frac{\omega_1}{\omega_2})|\omega_2|\right)^{-1}$. Тогда

$$|m\omega_1 + n\omega_2| = |m\frac{\omega_1}{\omega_2} + n||\omega_2| > |\Im(m\frac{\omega_1}{\omega_2} + n)||\omega_2| = m\Im(\frac{\omega_1}{\omega_2})|\omega_2| > C.$$

Аналогично, $|m\omega_1 + n\omega_2| > C$, если $> C\left(\Im(\frac{\omega_2}{\omega_1})|\omega_1|\right)^{-1}$.