Семинар 7.

Задача 1. С каким знаком входит в определитель (7×7)-матрицы (a_{ij}) произведение $a_{45}a_{71}a_{23}a_{67}a_{34}a_{12}a_{56}$?

Задача 2. Зная характеристический многочлен $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ матрицы A, найдите ее след и определитель.

Задача 3. *Скалярным произведением* в векторном пространстве V над полем $\mathbf{k}$ называется всякая билинейная симметрическая форма $\Phi = (\cdot,\cdot)$ на V. Скалярное произведение называется *невырожденным*, если индуцируемое им линейное отображение векторных пространств $f_\Phi : V \to V^\vee,\ v \mapsto (v,\cdot)$ является изоморфизмом. Пусть V - конечномерное векторное пространство с базисом $(e) = (e_1, ..., e_n)$ и скалярным произведением $\Phi = (\cdot,\cdot)$. $(n \times n)$-матрица $G_e = (g_{ij})$, где $g_{ij} = (e_i, e_j)$, называется *матрицей Грама* скалярного произведения Φ в базисе (e). Докажите, что скалярное произведение Φ на V невырождено тогда и только тогда, когда его матрица Грама G_e в каком-либо базисе (e) невырождена.

Задача 4. Пусть $V = \mathbf{k}[x]_{\leqslant 3}$ - пространство многочленов степени $\leqslant 3$ над полем $\mathbf{k}$, и пусть $a \in \mathbf{k}$. Рассмотрим на $V \times V$ функцию $(f,g) := (fg)(a)$. Является ли она скалярным произведением на V? Если да, то является ли это скалярное произведение невырожденным?

Задача 5. Скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ на вещественном векторном пространстве V называется *положительно определенным* (или *евклидовым*), если $(v,v) \geqslant 0$ для любого $v \in V$ и из условия $(v,v) = 0$ следует, что $v = 0$. (В этом случае пространство V также называется *евклидовым векторным пространством*.) Докажите, что евклидово скалярное произведение в конечномерном векторном пространстве V невырождено.

Задача 6. Пусть W - подпространство евклидова векторного пространства V со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Подпространство $W^\perp = \{v \in V \mid (v,w) = 0\ \forall w \in W\}$ пространства V называется *ортогональным дополнением к подпространству* W *в* V. На пространстве $V = M(n,\mathbb{R})$ рассмотрим билинейную форму $(A,B) = \mathrm{tr}(AB^T)$, где $\mathrm{tr}(X)$ след матрицы X.
а) Является ли эта форма евклидовым скалярным произведением на V?
б) Если да, то найдите $W^\perp$, где W - подпространство скалярных матриц в V.

Задача 7. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ дана гиперплоскость $W = \{2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$ и вектор $v = (1,0,2,3)$. Найдите ортогональные проекции вектора v на подпространства W и $W^\perp$.

Задача 8. В условиях задачи 6 отразите вектор v в гиперплоскости W.

Задача 9. В условиях задачи 6 дайте определение угла между прямой $l = \{x_1 = x_2,\ x_3 = x_4,\ x_2 = 2x_3\}$ и подпространством $\{3x_1 - 2x_2 + x_4 = 0,\ x_2 + x_3 = 0\}$ и найдите этот угол.

Задача 10. Пусть $(e_1, ..., e_k)$ - ортонормированная система векторов евклидова пространства V (не обязательно конечномерного). Докажите, что для любого вектора $x \in V$ выполняется *неравенство Бесселя*, где обозначено $|x| := \sqrt{(x,x)}$:

$$\sum_{i=1}^{k} (x, e_i) \leqslant |x|^2.$$

При каком условии это неравенство превращается в равенство?