Челноков Григорий Ривенович

grishabenruven@yandex.ru

1 О представлении $\mathbb{Z}$ в виде прямой суммы, где одно из слагаемых конечно.

Тема рекомендована студентам 1–2 курса.

Пусть $F, G \subset \mathbb{Z}$ – подмножества множества целых чисел. Будем говорить, что $\mathbb{Z}$ представлено в виде *прямой суммы* $\mathbb{Z} = F \oplus G$ если каждое целое число единственным образом представимо в виде $f + g \mid f \in F,\ g \in G$. В этом случае множество F будем называть *паркетным*, а множество G – *паркетом* F.

Тема курсовой – исследование конечных паркетных множеств в $\mathbb{Z}$. Это один из вопросов, относящийся к достаточно популярному разделу теории абелевых групп, из ярких представителей этого раздела стоит отметить, например, такой: (для $\mathbb{Z}^2$ определения всех понятий аналогичны первому абзацу) *пусть $F \subset \mathbb{Z}^2$ – конечное паркетное множество в $\mathbb{Z}^2$. Правда ли, что среди его паркетов найдется периодический? (множество $G \in \mathbb{Z}^2$ называется периодическим если найдутся два неколлинеарных целочисленных вектора (a, b) и (c, d), таких что G переходит в себя при параллельном переносе на них: $G = G + (a, b) = G + (c + d)$)* Несмотря на простоту формулировки и широкую известность, этот вопрос был открытым более 40 лет.

В случае $\mathbb{Z}$ многие вопросы становятся проще, однако и там есть содержательные проблемы.

Реферативная часть курсовой заключается в том, чтобы разобрать доказательство двух результатов о паркетных множествах простой мощности. Пусть мощность F – простое число p, кроме того, пусть никакой сдвиг F не лежит в подрешетке $k\mathbb{Z}$ ни для какого $k > 1$ (это требование естественно, иначе вместо представления $\mathbb{Z}$ в виде прямой суммы достаточно изучить представления $k\mathbb{Z}$). Во-первых, для таких множеств есть простой критерий паркетности, во-вторых, у каждого такого паркетного множества паркет единственен с точностью до сдвига.

Возможности для оригинального исследования следующие. Скорее всего критерий паркетности обобщается на множества мощности pq, где p и q – простые числа. Для паркетных множеств с такой мощностью уже неверно утверждение о единственности паркета, но скорее всего может быть получено эффективное перечисление всех паркетов. Оба результата на настоящий момент неизвестны.

Трансверсальные числа семейств d-отрезков

Цель данной курсовой – исследовать результаты Хэлливского типа для следующего типа множеств.

Зафиксируем натуральное число d и прямую ℓ. *Однородным d-отрезком* назовем объединение не более чем d отрезков на ℓ.

Зафиксируем натуральное число d и прямые $\ell_1, \ldots, \ell_d$. Неоднородным d-отрезком назовем объединение d отрезков, каждый из которых лежит на соответствующей прямой $\ell_1, \ldots, \ell_d$.

Числом независимости семейства множеств назовем максимальное количество попарно не пересекающихся множеств в данном семействе. *Трансверсальным числом* семейства множеств называется минимальная мощность множества, пересекающегося с каждым множеством данного семейства. Неформального говоря, это "минимальное число гвоздей, которые надо вбить чтобы проколоть каждое множество из семейства".

В [1] и [2] доказывается, что семейство однородных d-отрезков с числом независимости k имеет трансверсальное число не больше $(d^2 - d + 1)k$, оценка улучшается до $(d^2 - d)k$ если $d \geq 3$ и не существует проективной плоскости порядка $d - 1$. Та же оценка, естественно, работает для случая неоднородных d-отрезков. Доказательство использует теорему Борсука-Улама, известны и другие подходы, основанные на близких топологических идеях. Удивительно компактное доказательство, основанное на идеологии линейного программирования (лемме Фаркаша или любом эквивалентном утверждении) приведено в [3], однако этот подход приводит к худшей мультипликативной константе $2d^2k$.

Реферативная часть курсовой заключается в том, чтобы разобрать оба подхода к доказательству: топологический и линейный, включая используемые теоремы. Возможности для оригинального исследования следующие. Во-первых, в [3] результат обобщается с d-отрезков на d-поддеревья дерева (все определения аналогичны). Однако, опять же, с худшей мультипликативной константой. Имеет смысл попробовать реализовать и в этом случае "топологическое"доказательство с целью получения лучшей оценки. Во-вторых, даже оценка Кайзера не точна по крайней мере для неоднородных d-отрезках при $d \geq 3$. Так, при $d = 3$, $k = 1$ оценка Кайзера 6, в то время как можно показать, что на самом деле трансверсальное число такого семейства не превосходит 4 (не опубликовано). Возможно, есть шансы получить улучшение серийного результата. Можно рассматривать аналоги цветной теоремы Хелли. Например: даны два семейства d-отрезов, известно что всякий d-отрезок первого семейства пересекается со всяким из второго. Что можно утверждать о максимуме трансверсального числа для данных семейств? Несложно показать что в этом случае для $d = 2$ одно из двух семейств имеет $(1, 2)$-трансверсаль (1 точка на ℓ_1 и две на ℓ_2). Интересными являются серийные оценки полиномиального порядка по d. Еще один подход: случае $d = 2$ фактически доказано, что необходимым условием для не существования (k, k)-трансверсали является существование $k + 1$ попарно не пресекающегося 2-отрезка; можно поискать аналогичные условия для других типов трансверсалей. Например, автору известно "достаточно хорошее"условие для не существования $(k, k + 1)$-трансверсали.

Литература

[1] G. Tardos, Transversals of 2-intervals, a topological approach, Combinatorica 15, 1 (1995), 123–134.

[2] T. Kaiser, Transversals of d-intervals, Discrete Comput Geom (1997) 18: 195. https://doi.org/10.1007/PL00009315

[3] N. Alon, Piercing d-intervals, Discrete Comput Geom (1998) 19: 333. https://doi.org/10.1007/PL00009349