Андрей Рябичев

ryabichev@179.ru

Несколько тем по маломерной топологии:

1 Гомологическая сфера Пуанкаре

Тема рассчитана на студентов 1–3 курса.

Предлагается разобраться с конструкцией гомологической сферы Пуанкаре, т. е. построить 3-мерное многообразие, имеющее гомологии как у S^3, но не гомеоморфное S^3.

Для этого используются следующие теоремы из алгебраической топологии, которые потребуется изучить/придумать: Теорема ван Кампена, Теорема Гуревича (см. [*Фоменко, Фукс. Курс гомотопической топологии*], либо [*Хатчер. Алгебраическая топология*]).

Последний шаг — собственно, построение гомологической сферы — можно прочитать в книге [*Прасолов, Сосинский. Узлы, зацепления и трёхмерные многообразия*], либо сделать самостоятельно.

2 Полиномиальный алгоритм распознавания вложимости графа в плоскость

Тема рассчитана на студентов 1–3 курса.

Пусть задан граф Г, например, с помощью матрицы инцидентности. Из теоремы Куратовского (которую предлагается использовать без доказательства) легко вывести экспоненциальный алгоритм распознавания планарности Г.

Оказывается, существует и полиномиальный алгоритм, но его конструкция чуть более сложна. Для этого можно рассмотреть коцикл пересечений по модулю 2 на взрезанном квадрате нашего графа. Можно доказать, что граф планарен тогда и только тогда, когда коцикл пересечений гомологичен нулю.

Желательно, но не обязательно, базовое знакомство с алгебраической топологией.

3 Образующие и соотношения для группы классов отображений

Тема рассчитана на студентов 1–4 курса.

Группа классов отображений многообразия — это фактор группы его диффеоморфизмов в себя по подгруппе диффеоморфизмов, изотопных тождественному. Предлагается придумать набор образующих и соотношений для группы классов отображений замкнутой ориентируемой поверхности. Все необходимые сведения про группы классов отображений доступно изложены в [*Farb, Margalit. A primer on mapping class groups*].

Как вариант, можно попробовать заняться этим для *неориентируемых* поверхностей, про группы классов отображений которых известно не так много.

4 Общие отображения поверхностей с заданными множествами складок и сборок

Тема рассчитана на студентов 2–4 курса. Эта тема для исследования, лотерея, как будет выглядеть конечный результат заранее неизвестно.

Для замкнутых поверхностей M и N общим отображением $M \to N$ будем называть отображение, имеющее в качестве критических точек лишь складки и сборки (см. [*Арнольд, Варченко, Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений*]). Множество критических точек общего отображения $M \to N$ — набор гладких непересекающихся кривых в M, а множество критических значений — набор кривых с каспами в N.

Вопрос: какие наборы кривых в N реализуются как множество критических значений общего отображения $M \to N$?

Если M и N ориентируемы, для этих кривых известны (вроде бы, точные) оценки на число компонент, каспов и точек пересечения, зависящие от $g(M)$ и $g(N)$ [*Yamamoto, Number of singularities of stable maps on surfaces*]. В конце этой статьи сформулировано несколько вопросов, которые предлагается иметь в виду.

С другой стороны, из [*Элиашберг, Об особенностях типа складки*] и [*Eliashberg, Mishachev, Topology of spaces of S-immersions*] видно, что множества общих отображений $M \to N$ с заданными критическими значениями могут быть устроены довольно погано.

Можно рассмотреть отображение из множества $\mathrm{St} \subset \mathrm{Map}(M, N)$ общих отображений $M \to N$ в множество C_N наборов кривых в N и попробовать найти препятствие к поднятию пути из C_N в St. Возможно, это позволит дать ответ на наш вопрос, более конкретный чем тупо экспоненциальный алгоритм, пытающийся склеить M из кусков, на которые данный набор кривых разбивает N.

Желательно, но не обязательно, знать что-нибудь про h-принцип, см., например, [*Мишачев, Элиашберг. Введение в h-принцип*].