

Семинар 8.

Задача 1. Найдите ортонормированный базис в подпространстве

- а) заданном уравнением $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ в \mathbb{R}^n ,
б) порожденном векторами $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(3, 2, 8, -7)$ в \mathbb{R}^4 .

Задача 2. Найдите ортонормированный базис в ортогональном дополнении к подпространству из задачи 1.б).

Задача 3. Напишите систему уравнений, задающую ортогональное дополнение к подпространству, заданному в \mathbb{R}^4 уравнениями

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0. \quad (1)$$

Задача 4. Какое максимальное число векторов можно выбрать в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , чтобы все углы между ними были тупыми?

Задача 5. В 4-мерном евклидовом пространстве V даны два двумерные подпространства U_1 и U_2 такие, что $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ и эти подпространства не являются ортогональными друг к другу. Всегда ли в одном из этих подпространств можно выбрать ортонормированный базис такой, чтобы его ортогональная проекция на второе подпространство была ортогональным семейством без нулевых векторов?

Задача 6. Линейный оператор $f : V \rightarrow V$ в евклидовом векторном пространстве V называется *ортогональным*, если он сохраняет евклидово скалярное произведение (\cdot, \cdot) в V , то есть $(f(v), f(w)) = (v, w)$ для любых векторов $v, w \in V$. В пространстве \mathbb{R}^3 со стандартной евклидовой структурой задан

линейный оператор своей матрицей в стандартном базисе: $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Является ли этот оператор ортогональным?

Задача 7. Пусть V - евклидово пространство с ортонормированным базисом (e_1, e_2, e_3) и A - ортогональный оператор в V с определителем 1 (оператор 1 рода). Докажите, что найдутся такие числа θ, φ, ψ такие, что $0 \leq \theta, \varphi, \psi \leq \pi$, и что $A = A_\varphi B_\theta A_\psi$, где A_φ и A_ψ - повороты в плоскости $\langle e_1, e_2 \rangle$ на углы φ и ψ , а A_θ - поворот в плоскости $\langle e_2, e_3 \rangle$ на угол θ .