Лекция 6-18. Интеграл Лебега и его свойства

1 Окончание доказательства теоремы Егорова

Нам осталось доказать лемму:

Лемма 1 *Пусть $f_n \to f$ почти всюду. Тогда $\forall \varepsilon, \delta\ \exists E_{\varepsilon,\delta}$ и N такие, что $\mu(CE_{\varepsilon,\delta}) < \delta$ и $|f - f_n||_{E_{\varepsilon,\delta}} < \varepsilon \forall n > N$.*

Доказательство Рассмотрим множество

$$E_{N,\varepsilon} = \{x||f - f_n| < \varepsilon \forall n > N\}. \tag{1}$$

По определению, $E_{N,\varepsilon} \nearrow$ as $N \nearrow$. По условию, $\mu(\cup_N E_{N,\varepsilon}) = 1$. Следовательно, для любого δ существует N, такое что $\mu(E_{N,\varepsilon}) > 1 - \delta$. Это множество мы и возьмем в качестве $E_{\varepsilon,\delta}$. $\square$

Следствие 1 *Из сходимости почти всюду следует сходжимость по мере.*

Доказательство Немедленно следует из теоремы Егорова. $\square$

2 Определения

Простые функции. Интеграл Лебега.

3 Интегрируемость.

Теорема 1 *Всякая ограниченная измеримая функция интегрируема.*

Доказательство

Лемма 2 *Всякая ограниченная измеримая функция является равномерным пределом простых.*

Доказательство Разобьем $[-N, N] \supset f(E)$ на равные полуинтервалы длины ε Занумеруем их: $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$. Пусть $\sigma_k = [a_k, b_k),\ E_k = f^{-1}(\sigma_k)$. Тогда E_k измеримо. Положим:

$$f_\varepsilon - \Sigma a_k E_k.$$

Тогда

$$|f - f_\varepsilon| \leq \varepsilon.$$

Следовательно,

$$f_{\frac{\varepsilon}{k}} \rightrightarrows f.$$

$\square$

Лемма 3 *Последовательность $f_{\frac{\varepsilon}{k}}$ фундаментальна в метрике C.*

Доказательство В силу неравенства треугольника,

$$||f_{\frac{\varepsilon}{k}} - f_{\frac{\varepsilon}{m}}||_C \leq \frac{\varepsilon}{k} + \frac{\varepsilon}{m}.$$

$\square$

Лемма 4 *Модуль интеграла от простой функции по единичному отрезку не больше ее модуля.*

Следствие 2 *Последовательность интегралов фундаментальна, следовательно, сходится.*

Лемма 5 *Интеграл измеримой функции не зависит от последовательности простых функций, которые ее равномерно приближают.*

Доказательство $f_n \rightrightarrows f,\ g_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n - g_n \rightrightarrows 0 \Rightarrow \int(f_n - g_n) \to 0.$ $\square$

$\square$

4 Элементарные свойства интеграла Лебега

Теорема 2 *(линейность)* $\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu.$

Доказательство Следует из линейности интеграла от простых функций, которая очевидна. $\square$

Теорема 3 *(аддитивность)* $\int_a^b f d\mu + \int_b^c f d\mu = \int_a^c f d\mu.$

Доказательство Следует из аддитивности интеграла от простых функций, которая очевидна. $\square$

5 Абсолютная непрерывность интеграла

Для любого измеримого множества $X \subset E$, $\int_X f d\mu := \int_E f \chi_X d\mu$.

Теорема 4 *Пусть f – ограниченная измеримая функция. Тогда для любого ε существует δтакое, что:*

$$\mu(X \subset E) < \delta \Rightarrow \int_X f d\mu < \varepsilon.$$

Доказательство Для любой простой функции g с носителем на X,

$$|\int_X g d\mu| \leq \mu(X) \cdot \max |g|.$$

Следовательно, аналогичное неравенство справедливо для ограниченных измеримых функций. $\square$