Лекция 8-18. Пространства L_1 и L_2

1 Неравенство Чебышева

Неравенство Чебышева можно выразить словами:

В комнату площади 10м^2 нельзя поставить прямоугольный стол площадью больше 10м^2.

Теорема 1 *(Неравенство Чебышева) Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ измерима, $f \geq 0$, $X \subset E$. Тогда $\forall c > 0$*

$$\mu\{x \in X | f(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int f(x) d\mu.$$

2 Пространство L_1 и его полнота

Определение 1 *Две измеримые функции на E эквивалентны, если они совпадают вне множества меры 0.*

Определение 2 *Пространство $L_1 = L_1(E)$ - это пространство классов эквивалентности суммируемых функций на E с нормой*

$$||f|| = \int_E |f| d\mu.$$

Теорема 2 *Определенное выше пространство L_1 с метрикой $\rho(f, g) = ||f - g||$ полно.*

Доказательство Доказательство похоже на детективную историю: предел надо сначала обнаружить, потом опознать.

Шаг 1. От последовательности к ряду. Пусть последовательность (f_n) фундаментальна в L_1. Тогда из нее можно выбрать подпоследовательность f_{n_k} так, что

$$|g_k| \leq \frac{1}{4^k}, \quad \text{где } g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k},\ g_1 = f_{n_1}.$$

Докажем, что ряд $\Sigma = \sum_1^\infty g_k$ сходится почти всюду к некоторому пределу f, причем предел принадлежит L_1, и $f_{n_k} \to f$ в L_1. В силу фундоментальности (f_n) отсюда будет следовать $f_n \to f$ в L_1.

Шаг 2. Охота за пределом. Докажем, что ряд $\sum_1^\infty g_k$ сходится почти всюду абсолютно. для этого заменим g_k на $|g_k|$. Не меняя обозначений, считаем на этом шаге, что $g_k \geq 0$. Положим:

$$X_K = (g_K \geq \frac{1}{2^k}).$$

По неравенству Чебышева,
$$\mu(X_K) \leq \frac{1}{2^k}.$$
Вне $X_K,\ g_k < \frac{1}{2^k}$. Положим:
$$Y_N = \cup_{N+1}^{\infty} X_k,\ \mu(Y_N) \leq \frac{1}{2^N}.$$
Вне Y_N ряд Σ сходится равномерно, и при $x \notin Y_N$,
$$R_N(x) := \sum_{N+1}^{\infty} g_k(x) \leq \frac{1}{2^N}.$$
Множества Y_N упорядочены по вложению, и их мера стремится к 0. Значит, их пересечение Y имеет меру 0. □

Шаг 3. Поимка предела. Вне множества Y ряд Σ сходится; обозначим предельную функцию через f; доопределим ее на Y как угодно, например, нулем. Докажеи, что $f \in L_1$. Переобозначим
$$\sum_1^m g_k = f_m$$
(раньше было f_{n_m}). Последовательность f_m монотонно возрастает, неотрицательна и фундаментальна в L_1. Значит, нормы $||f_m||$ ограничены в совокупности; $||f_m|| \leq l$. Поскольку $f_m \overset{\text{п.в.}}{\longrightarrow} f$, для любого N
$$(f_m)_N \to f_N \text{ при } m \to \infty.$$
По теореме Лебега об ограниченной сходимости, для любого N,
$$\int (f_m)_N d\mu \to \int f_N d\mu \leq l.$$
Следовательно, интегралы всех срезок функции f ограничены, а она сама суммируема: $||f|| \leq l,\ f \in L_1$.

Шаг 4. Опознание предела. Докажем, что $||f - f_m|| \to 0$. Имеем: $f_m \leq f,\ f \in L_1,\ |f - f_m| \leq 2|f|$. Поэтому к интегралу $\int |f - f_m| d\mu$ можно применить теорему Лебега о мажорируемой сходимости:
$$f - f_m \overset{\text{п.в.}}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \int |f - f_m| d\mu \to 0.$$
Для случая $g_k \geq 0$, сходимость ряда Σg_k к функции $f \in L_1$ доказана.

Пусть теперь члены ряда Σ - знакопеременные, но попрежнему при $k > 1/\ ||g_k|| \leq \frac{1}{4^k}$. Тогда ряд $\Sigma|g_k|$ сходится почти всюду к функции $f \in L_1$, как доказано выше.

Тем самым, ряд Σ почти всюду сходится абсолютно. Пусть g - предельная функция. Очевидно, $|g| \leq f$, и $|f_m| \leq f$, где $f_m = \sum_1^m g_k$. Тогда $g \in L_1$, и

$$\int |g - f_m| d\mu \to 0$$

по теореме о мажорируемой сходимости. Это доказывает полноту L_1.

3 Пространство L_2 и его полнота.

Определение 3 *Пространство L_2 – это линейное пространство измеримых функций, квадрат которых суммируем, с нормой*

$$||f||_{L_2}^2 = \int |f|^2 d\mu.$$

Теорема 3 *Пространство $L_2 = L_2(E)$, определенное выше, полно.*

Доказательство Пусть (f_n) - фундаментальная последовательность в L_2. Тогда она фундаментальна и в L_1, поскольку $||\cdot||_{L_1} < ||\cdot||_{L_2}$ (по неравенству Коши-Буняковского). Пусть $f_n \to f$ почти всюду и в L_1 Из фундаментальности (f_n) в L_2 следует, что существует такое l, что $\int |f|^2 d\mu < l$. Отметим, что

$$|f - f_n|^2 \leq 2(|f|^2 + |f_n|^2).$$

Пусть сначала $f_n \nearrow f,\ f_n \geq 0,\ f \geq 0$ Тогда

$$|f - f_n|^2 \leq 4|f|^2.$$

Функция $|f|^2$ суммируема, поскольку для любого N, $\int |f_N|^2 d\mu \leq l$. Значит, по теореме о мажорируемой сходимости,

$$\int |f - f_n|^2 d\mu \to 0,$$

поскольку $f - f_n \to 0$ почти всюду.

Пусть теперь $f_n \to f$ немонотонно. Переходя от последовательностей к рядам, сводим этот случай к предыдущему, как это сделано выше. $\square$