Лекция 7-18. Сходимость под знаком интеграла. Суммируемые функции

1 Теорема Лузина

Теорема 1 *Для каждой измеримой функции* $f : E \to \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0 \exists g \in C(E) : \mu\{f \neq g\} < \varepsilon$.

Теорема 2 *Любая измеримая функция непрерывна на замкнутом множестве, дополнение к которому имеет сколь угодно малую меру.*

Это свойство Лузин называл C-свойством.

Предложение 1 *Любая функция, непрерывная на замкнутом подмножестве отрезка, может быть продолжена до непрерывной функции на весь отрезок.*

Лемма 1 *Всякая ограниченная измеримая функция является равномерным пределом конечных простых.*

Эта лемма доказана в разделе 2 лекции 6 (подробности на лекции).

Теорема 1 сразу следует из теоремы 2 и предложения. Предложение доказано на лекции. Теорема 2 доказывается по следующему плану.

1. C-свойство Лузина линейно.
2. C-свойство Лузина сохраняется при равномерной сходимости.
3. C-свойство Лузина выполняется для характеристических функций измеримых множеств, следовательно для всех простых функций с конечным числом значений, следовательно, для всех ограниченных имеримых функций, следовательно, для всех измеримых функций вообще.

2 Теорема Лебега об ограниченной сходимости

Теорема 3 *Если последовательность ограниченных в совокупности измеримых функций сходится почти всюду на* E*, то возможен предельный переход под знаком интеграла.*

Доказательство (краткое) Утверждение следует из теоремы Егорова и абсолютной непрерывности интеграла, точнее, его верхней оценки. По теореме Егорова, наша подпоследовательность сходится равномерно вне множества сколь угодно малой меры. Вне этого (плохого) множества предельный переход под знаком интеграла возможен в силу равномерной сходимости. Интеграл по плохому множеству от любой функции из нашей последовательности, а также от предельной функции, не превосходит произведения меры множества на общую верхнюю грань модулей всех этих функций. Значит, этот интеграл мал. $\square$

Доказательство (полное, требуется на ТК). Пусть $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$, $|f_N| \leq N$. Предел f измерим по теореме из прошлой лекции. Поскольку $f \leq N$, $\int f d\mu$ существует. Докажем, что $|\int f d\mu - \int f_n d\mu| \to 0$. Возьмем произвольное ε и $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$. По теореме Егорова, существует множество X меры меньше δ, вне которого сходимость $f_n \to f$ равномерна. Тогда существует такое K, что для всех $n > K$,

$$|f - f_n| < \varepsilon \text{ на } E \setminus X.$$

Для таких n,

$$\left| \int_{E \setminus X} f d\mu - \int_{E \setminus X} f_n d\mu \right| < \varepsilon.$$

Далее, для всех n,

$$\left| \int_X f_n dx \right| < \delta N = \frac{\varepsilon}{2}, \; \left| \int_X f dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, для $n > K$,

$$\left| \int_E f d\mu - \int_E f_j n d\mu \right| < 2\varepsilon.$$

$\square$

3 Суммируемые функции

Определение 1 *Срезкой f_N неограниченной функции f называется*

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), \; |f(x)| \leq N \\ N, \; f(x) \geq N \\ -N, \; f(x) \leq N \end{cases}$$

Определение 2 *Неотрицательная функция суммируема, если интегралы от ее срезок ограничены в совокупности.*

Определение 3 *Неограниченная функция суммируема, если ее модуль суммируем.*

Определение 4 *Интеграл суммируемой функции f определяется как предел:*

$$\int f d\mu = \lim_{N \to \infty} \int f_N d\mu.$$

Задача 1 *Доказать линейность, аддитивность и абсолютную непрерывность интеграла для суммируемых функций.*

Задача 2 *Доказать, что предел в определении 4 можно брать по любой подпоследовательности $N_k \to \infty$, причем результат не зависит от выбора последовательности.*

4 Теорема Лебега о мажорируемой сходимости

Теорема 4 *Пусть последовательность суммируемых функций сходится почти всюду на E, и модули всех функций последовательности не превосходят некоторой суммируемой функции. Тогда предельная функция суммируема и возможен предельный переход под знаком интеграла.*

Доказательство Пусть f_n, g суммируемы, $|f_n| \le g \forall n,\ f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$. Тогда функция f измерима. По определению срезок,

$$(f_n)_N \to f_N, \text{ и } |f_N| \le |g_N|.$$

По теореме об ограниченной сходимости,

$$\int (f_n)_N d\mu \to \int f_N d\mu,$$

и

$$\left| \int |f_N| d\mu \right| \le \int g_N d\mu < \int g d\mu.$$

Следовательно, интегралы модулей всех срезок фкункции f ограничены; значит, она сама суммируема. Наконец,

$$\delta_n := \left| \int f d\mu - \int f_n d\mu \right| \le \left| \int \left(f_N - (f_n)_N\right) d\mu \right| + \left| \int (f - f_N) d\mu \right| + \left| \int \left(f - (f_n)_N\right) d\mu \right|.$$

Каждое из последних двух слагаемых не больше, чем

$$\int (g - g_N) d\mu := I_N.$$

Но $I_N \to 0$ при $N \to \infty$, поскольку функция g суммируема. Значит, $\delta_n \to 0$. $\square$