Материалы к семинарам по матанализу (третий семестр)

10-я — 11-я недели (12–23.11.2018)

Краткое содержание лекций

Лекции 10–11. Абстрактная теория меры

1. Примеры мер. Мера Стилтьеса на прямой. Мера Бернулли
2. Продолжение меры на сигма-алгебру
3. Интеграл Лебега в общей ситуации

Примерные задачи семинаров

Задача 5.1. Докажите, что производящая функция меры на отрезке $F_\mu(x) = \mu([0,x])$ монотонно возрастает и полунепрерывна справа.

Задача 5.2. По определению меры Стилтьеса с полунепрерывной справа производящей функцией F, $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$. Найдите $\mu_F([a,b]), \mu_F([a,b)), \mu_F((a,b))$.

Носитель меры — это максимальное замкнутое подмножество такое, что окрестность любой его точки имеет положительную меру.

Мера называется *абсолютно непрерывной* (относительно меры Лебега) если она равна 0 для любого множества лебеговой меры 0.

Мера μ называется *дискретной*, если существует такое множество A и такой набор чисел $p_a > 0$, $a \in A$, что $\mu(X) = \sum_{a\in A\cap X} p_a$ для любого множества X.

Мера μ называется *сингулярной*, если она равна 0 для любого одноточечного множества, но есть такое множество B лебеговой меры 0, что $\mu(CB) = 0$.

Задача 5.3* Покажите, что всякая мера Стилтьеса μ_F представима в виде суммы абсолютно непрерывной, дискретной и сингулярной мер.

Задача 5.4. Докажите, что дискретная мера может иметь не более, чем счетное число атомов.

Теорема (Радона—Никодима)**.** *Для любой меры ν, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега μ, существует измеримая функция f такая, что*

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Задача 5.5. Докажите σ-аддитивность абсолютно непрерывной меры.

Задача 5.6. Докажите, что точки разрыва производящей функции и только они — это атомы соответствующей меры.

Задача 5.7. Для меры Стилтьеса с заданной производящей функцией определите длину на элементарных множествах и их счетных объединениях и докажите ее полуаддитивность.

Задача 5.8. Опишите все меры с конечными носителями.

Задача 5.9. Найдите интеграл от функции по дискретной мере.

Задача 5.10. Выразите интеграл по абсолютно непрерывной мере через интеграл по мере Лебега.

Задача 5.11. Постройте сингулярную меру.

Задача 5.12. Выразите интеграл Стилтьеса с гладкой производящей функцией через интеграл по мере Лебега.

Задача 5.13. Докажите, что прообраз σ-алгебры при любом отображении — снова σ-алгебра.

Задача 5.14. Пусть M, N — пространства с заданными на них σ-алгебрами U_M и U_N , а $f\colon M \to N$ — измеримое отображение. Для меры μ на σ-алгебре U_M определим её прямой образ $f_*\mu\colon U_N \to \mathbb{R}$ посредством $f_*\mu(Z) := \mu(f^{-1}(Z)))$. Докажите, что это определение задает меру на N.

Задача 5.15. Постройте пример измеримого множества на плоскости, проекция которого на ось абсцисс неизмерима.

Задача 5.16. Вычислите интеграл Лебега—Стилтьеса $\int_{(-1,1]} g\, d\phi$ для

$$\phi = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 2 & x \geq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad g = 2.$$

Задача 5.17. Вычислите интеграл Лебега—Стилтьеса $\int_{(-1,1]} g\, d\phi$ для

$$\phi = \begin{cases} x - 1 & x < 0 \\ x + 2 & x \geq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad g = 2.$$

Задача 5.18. Вычислите интеграл Лебега—Стилтьеса $\int_{(-1,1]} g\, d\phi$ для

$$\phi = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 2 & x \geq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad g = 2 + x^2.$$

Пусть $X = \{0, 1\}$ есть множество из двух элементов с мерой $\mu(0) = \mu(1) = 1/2$. Напомним, что мера (Бернулли) на множестве бесконечных последовательностей из нулей и единиц $X_\infty := \times_{i=1}^{\infty} X_i$ определялась сначала на цилиндрических подмножествах X_∞ (что это?), а затем продолжалась на σ-алгебру измеримых множеств по общей теореме о продолжении меры.

Задача 5.19. Докажите, что для любой точки $x = (x_1, x_2, \dots) \in X_\infty$ множество $\{x\}$ измеримо и имеет меру 0.

Задача 5.20. Докажите, что множество точек $x = (x_1, x_2, \dots)$ для которых все x_i, кроме конечного числа, равны 1, измеримо и имеет меру 0. Обозначим дополнение до него с естественной мерой через $\overline{X}_\infty$.

Задача 5.21. Для $x = (x_1, x_2, \dots) \in \overline{X}_\infty$ определим $z(x) = \sum x^i/2^i$. Докажите, что z определяет взаимно-однозначное соответствие между $\overline{X}_\infty$ и полуинтервалом $[0, 1)$.

Задача 5.22. Докажите, что множество $\{x \in \overline{X}_\infty \mid a < z(x) < b\}$ измеримо и имеет меру $b - a$.

Задача 5.23. Докажите, что для любого борелевского множества $A \subset [0, 1)$ множество $\{x \in \overline{X}_\infty \mid z(x) \in A\}$ измеримо и имеет меру, равную лебеговой мере A.

Задача 5.24. Рассмотрите множество бесконечных в обе стороны последовательностей из нулей и единиц и меру Бернулли на нем. Постройте отображение этого множества на единичный квадрат такое, что мера Лебега является прямым образом меры Бернулли.

Задача 5.25. Покажите, что сдвиг на множестве бесконечных в обе стороны последовательностей из нулей и единиц сохраняет меру Бернулли.