Материалы к семинарам по матанализу (третий семестр)

7-я — 9-я недели (15.10–09.11.2018)

Краткое содержание лекций

Лекции 7–9. Сходимость под знаком интеграла, пространства L^1 и L^2

1. Теорема Лузина
2. Теорема Лебега об ограниченной сходимости
3. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости
4. Пространства $L^1([0,1])$, $L^2([0,1])$, их полнота.

Примерные задачи семинаров

Задача 4.1. Найдите все функции на отрезке, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем 2.

Задача 4.2. Докажите, что сходимость в $L^1([0,1])$ влечёт сходимость по мере.

Задача 4.3. Постройте последовательность измеримых функций $f_n \geq 0$, таких что $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\,dx = 0$, но $\sup_n f_n(x) = +\infty$ в любой точке.

Задача 4.4. Приведите пример последовательности простых функций f_n на $[0,1]$ со следующими свойствами: $f_n \to f$ почти всюду, $\int_0^1 f_n\,dx = 0$, f не является суммируемой по Лебегу.

Задача 4.5. Докажите, что если последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$ на $[0,1]$ сходится к функции f в $L^1([0,1])$, т. е. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n - f|\,dx = 0$, и $g_n \to g$ почти всюду, причём $|g_n| \leq C$ для некоторой константы C, то $f_n g_n$ сходятся к fg в $L^1([0,1])$.

Задача 4.6 (Равномерная интегрируемость)**.** Докажите, что если последовательность функций f_n сходится почти всюду к функции f на $[0,1]$ и $\lim_{N\to+\infty} \sup_n \int_{|f_n|>N} |f_n|\,dx = 0$, то f_n сходится к f в $L^1([0,1])$.

Задача 4.7. Используя предыдущую задачу докажите, что если f_n сходится почти всюду к функции f на $[0,1]$ и $\sup_n \int_0^1 f_n^2\,dx < \infty$, то f_n сходится к f в $L^1([0,1])$.

Задача 4.8.* Докажите, что если $f_n \geq 0$, $f_n \to f$ почти всюду и $\lim_n \int_0^1 f_n\,dx = \int_0^1 f\,dx$, то $f_n \to f$ в $L^1([0,1])$. Докажите, что без условия $f_n \geq 0$ это неверно.

Задача 4.9. При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ функция x^α лежит в $L^1([0,1])$, $L^1([1,+\infty])$, $L^1([0,+\infty])$, $L^2([0,1])$, $L^2([1,+\infty])$, $L^2([0,+\infty])$? Найти её норму.

Задача 4.10. Докажите, что $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$.
Приведите пример, показывающий, что для $L^2([1,+\infty])$, $L^1([1,+\infty])$ это не так.

Задача 4.11. Докажите, что пространства $L^1([0,1])$ и $L^2([0,1])$ сепарабельны.

Задача 4.12. Докажите, что в пространстве $L^p([0,1])$, $p = 1, 2$, плотны следующие множества функций:
а) множество всех ограниченных функций,
б) множество всех кусочно-постоянных функций,
в) множество всех непрерывных функций.

Задача 4.13. Докажите, что множество неотрицательных функций является замкнутым и нигде не плотным подмножеством пространства $L^1([0,1])$.