Семинар 9.

Задача 1. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ возьмем произвольный ортонормированный базис $v_1,\ v_2,\ v_3$. Пусть $u_1,\ u_2,\ u_3$ - ортогональные проекции векторов $v_1,\ v_2,\ v_3$ на подпространство $\mathbb{R}^2 = \{x_3 = 0\}$, и пусть $z_1,\ z_2,\ z_3$ - комплексные числа, соответствующие векторам $v_1,\ v_2,\ v_3$ при стандартном отождествлении $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C},\ (x_1, x_2) \mapsto z = x_1 + ix_2$. Докажите, что $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

Задача 2. В $\mathbb{R}^3$ дан параллелепипед Π_{abc}, построенный на векторах $a = (1, 0, -1),\ b = (2, -1, 0),\ c = (-1, 3, 2)$ как на сторонах, проходящих через общую вершину. Найдите высоту параллелепипеда Π_{abc}, проведенную к его грани, проходящей через стороны a и b.

Задача 3. Найдите расстояние между прямыми l и m в $\mathbb{R}^3$, заданными параметрическими уравнениями $l = \{u + pt \mid t \in \mathbb{R}\}$ и $m = \{v + qt \mid t \in \mathbb{R}\}$, где $u = (3, -1, 0),\ v = (2, 0, 1),\ p = (-2, 3, 2),\ q = (0, 1, 2)$.

Задача 4. В $\mathbb{R}^4$ найдите расстояние от точки $x = (2, 1, -1, 1)$ до гиперплоскости, заданной уравнением $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$.

Задача 5. Пусть $v = (v_1, ..., v_n)$ - произвольный базис евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, и G_e - матрица Грама стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$ в этом базисе. Считая объем стандартного единичного куба в $\mathbb{R}^n$ равным 1, найдите объем V_e параллелепипеда, построенного на векторах базиса v, отложенных от начала координат.

Задача 6. (*Параметризация Кэли.*) Докажите, что отображение $A \mapsto (E-A)(E+A)^{-1}$ задает биекцию между множеством вещественных кососимметрических матриц и множеством вещественных ортогональных матриц без собственного значения -1.

Задача 7. Для фиксированного вектора e единичной длины в евклидовом пространстве V отображение $f:\ V \to V,\ v \mapsto v - 2(v, e)e$ называется отражением в гиперплоскости $\langle e \rangle^{\perp}$. Покажите, что f - ортогональный линейный оператор, и найдите его собственные значения и собственные векторы.

Задача 8. Найдите канонический базис и матрицу в этом базисе ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 9. а) В композицию скольких отражений в гиперплоскости разлагаются ортогональные операторы в задачах 8.а и 8.б?
б) Докажите, что каждый ортогональный оператор f в конечномерном евклидовом пространстве V разлагается в композицию отражений в гиперплоскостях, и минимальное число таких отражений равно коразмерности подпространства $\ker(f - \mathrm{id}_V)$.

Задача 10. а) Пусть $u = (u_1, ..., u_n)$ $v = (v_1, ..., v_n)$ - два базиса евклидова векторного пространства V. Докажите, что ортогональный оператор в V, переводящий базис u в базис v, существует тогда и только тогда, когда матрицы Грама G_u и G_v совпадают. Верно ли аналогичное утверждение, если в качестве u и v вместо базисов взять любые две системы из одинакового числа векторов в V?