

Классическая теория поля 2018 .

Листок 5. Электромагнитное поле II:

Свободные электромагнитные волны. Поля в присутствии источников.

Срок сдачи: до 19 декабря

1. Рассмотрим 4-вектор потенциала электромагнитного поля $A^\mu(x) = (A^0, \vec{A})$ в кулоновской калибровке $A^0(x) = 0$, $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Уравнения Максвелла эволюции свободного электромагнитного поля допускают решение в виде плоской монохроматической волны

$$\vec{A}(x) = \operatorname{Re} \left(\vec{B}_0 \exp(-ik \cdot x) \right),$$

где $\vec{B}_0(x)$ — постоянный 3-вектор (вообще говоря, с комплексными компонентами), а $k^\mu = (k^0, \vec{k})$ — постоянный 4-вектор.

- Найдите выражения для напряженностей электрического и магнитного полей \vec{E} и \vec{H} , отвечающих такому вектор-потенциалу.
- Найдите все соотношения между векторами \vec{k} , \vec{B}_0 , \vec{E} и \vec{H} , следующие из калибровочных условий и уравнений Максвелла. Докажите, в частности, что напряженности электрического и магнитного полей \vec{E} и \vec{H} ортогональны друг другу и вектору \vec{k} .
- Докажите, что в общем случае в любой фиксированной точке пространства векторы \vec{E} и \vec{H} вращаются с постоянной угловой скоростью в плоскости перпендикулярной вектору \vec{k} , а их концы описывают эллипсы (так называемая, эллиптически поляризованная волна). При каких условиях на \vec{B}_0 получаются волны круговой и линейной поляризации?
- Вычислите вектор Пойнтинга и покажите, что энергия плоской волны распространяется со скоростью света в направлении вектора \vec{k} .

2. Найдите пространственную плотность заряда, отвечающую сферически симметричному потенциалу следующего вида (потенциал Юкавы):

$$\phi(\vec{r}) = \frac{e^{-r/a}}{r}, \quad r = |\vec{r}|,$$

где a — постоянный положительный параметр.

Подсказка: воспользуйтесь результатом задачи №5 третьего листка.

3. В пространстве Минковского M_3 найдите запаздывающую функцию Грина для уравнения движения свободного безмассового скалярного поля:

$$\square G(x) = \delta^{(3)}(x), \quad G(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad x^0 < 0.$$

Здесь $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$, а $\eta^{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1, -1, -1)$ — метрический тензор в пространстве M_3 .

4. а) Заряд q колеблется вдоль оси Oz вокруг начала координат по закону

$$z(t) = R \cos(\omega t).$$

Полагая $R\omega \ll c$ (c — скорость света), найдите поле этого заряда на расстояниях $r \gg c/\omega$ (волновая зона) в первом неисчезающем порядке по отношению v/c , где v — скорость заряда.

б) В предположениях предыдущего пункта найдите поле в волновой зоне для заряда, равномерно вращающегося в плоскости xOy вокруг начала координат по закону:

$$x(t) = R \cos(\omega t), \quad y(t) = R \sin(\omega t).$$

5. Точечный заряд $-q$ движется по окружности радиуса R вокруг закрепленного точечного заряда $q > 0$. Период обращения равен T . Определите среднюю за период обращения интегральную мощность дипольного излучения этой системы (то есть, суммарную мощность дипольного излучения по всем направлениям).

6. В трехмерном пространстве Минковского с метрическим тензором $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ задано действие для вещественного векторного поля $A_\mu(x)$, взаимодействующего с комплексным скалярным полем ϕ

$$S[A] = \int_{M_3} d^3x \left[\varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \overline{\nabla^\mu \phi} \nabla_\mu \phi \right], \quad \nabla_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu,$$

где $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}$ — полностью антисимметричный тензор третьего ранга, нормированный условием $\varepsilon^{012} = 1$.

- а) Инвариантно ли действие относительно каких-либо калибровочных преобразований полей?
- б) Напишите уравнения движения полей ϕ и A_μ .
- в) Найдите тензор энергии-импульса этой системы.