Баранников Сергей Александрович
serguei.barannikov@imj-prg.fr

Темы курсовых работ

Инварианты комплекса Морса и Persistence diagrams.

Тема предназначена для студентов 1го курса и выше.

Комплекс Морса функции общего положения на гладком многообразии, снабжённом метрикой, определяется как векторное пространство порождённое набором всех критических точек функции с дифференциалом определяемым количеством градиентных кривых соединяющих критические точки соседних индексов.

При изменении метрики дифференциал в комплексе изменяется. Оказывается, см [B94], что кроме самих гомологий комплекса имеется также более тонкий инвариант данной функции независимый от изменения метрики. Это нормальная форма комплекса при приведении его к простейшему виду верхнетреугольными преобразованиями, уважающими фильтрацию, заданную уровнями критических значений. Эта нормальная форма задаёт каноническое разбиение исходного набора критических точек на пары birth-death критических точек (плюс критические точки дающие базис в гомологиях).

Этот инвариант, то есть каноническое разбиение на пары множества критических точек, начал за последние 15 лет очень широко использоваться в прикладной математике под именем «persistence diagrams». Это основной математический инструмент так называемого «Топологического анализа данных» («Topological Data Analysis»), используемого в большом количестве разных областей науки, от биологии до обработки сигналов и робототехники.

С помощью этого инварианта можно распознавать какие морсовские критические точки будет иметь общее гладкое продолжение функции, определённой в окрестности границы k-мерного шара, при продолжении внутрь шара.

Задача: описать получающиеся инварианты, представленные выше, для ограничения на сферу функции, которая внутри шара имеет только вырожденную критическую точку вида $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + axyz \;\; (a \in R, a^3 + 27 \neq 0)$.

Литература

[B94] S. Barannikov, *The framed Morse complex and its invariants*, Advances in Soviet Math. 21 (1994), 93-115.
[EH08] H.Edelsbrunner, J.Harer, *Persistent homology - a survey,* Contemporary mathematics 453, (2008), 257-282