Васильев Виктор Анатольевич

vavasiliev@hse.ru

1 Лагранжевы многообразия и индекс Маслова

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Литература:

В.И. Арнольд, О характеристическом классе, входящем в условия квантования. Функц. анализ и его приложения, 1:1 (1967), 1–14.

2 Особенности отображений типа $\Sigma^{2,0}$: классификация и распадения.

Тема рекомендована студентам 2–4 курсов.

Согласно классификации Тома–Бордмана особых точек дифференцируемых отображений, отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет в точке X особенность типа Σ^i, если ядро его дифференциала в этой точке i-мерно, особенность типа $\Sigma^{i,j}$ если оно имеет тип Σ^i и кроме того ограничение этого отображения на множество близких точек типа Σ^i j-мерно, и т.д. Самые простые особенности — типа $\Sigma^{1,1,\dots 1,0}$ (так называемые морэновские) — хорошо изучены. Следующие по сложности — особенности типа $\Sigma^{2,0}$: для типичного отображения, множество особых точек этого типа образует подмножество размерности $n-4$. Около них в принципе могут появляться морэновские особенности меньшей сложности: $\Sigma^{1,0}, \Sigma^{1,1,0}$ и $\Sigma^{1,1,1,0}$.

Задача: перечислить геометрически различные особенности типа $\Sigma^{2,0}$ и описать, как около них ведут себя множества особых точек морэновского типа.

Литература:

В.И.Арнольд, А.Н.Варченко, С.М.Гусейн-Заде, Особенности дифференцируемых отображений, том 1, глава 2.

3 Теорема Якоби–Арнольда о четырех вершинах каустики и ее обобщения

Тема рекомендована студентам 2–4 курсов и магистрантам

Геодезические линии, выходящие во все стороны из полюса двумерной единичной сферы, собираются в противоположном полюсе, потом в исходном полюсе, и так далее. Это можно переформулировать в терминах геодезического отображения $S^1 \times \mathbb{R}^1_+ \to S^2$ (сопоставляющего паре (φ, t) точку геодезической, вышедшей из полюса в направлении φ и прошедшей расстояние t): критические точки этого отображения являются окружностями $S^1 \times k\pi$, а критические значения – это только два полюса сферы. Если сферу немного продеформировать, то критические множества изменятся слабо, а критические значения продеформируются в особые замкнутые кривые, сосредоточенные вблизи полюсов и имеющие (в случае деформации общего положения) самопересечения и полукубические точки возврата. Теорема Арнольда говорит, что на каждой такой кривой не меньше четырех точек возврата.

Задание. Студентам 2-3 курса: разобрать разные доказательства этого утверждения.

Студентам 4 курса и магистрантам: обобщить на случай многомерных сфер и/или на не очень малые деформации.

Литература:

1. В.И. Арнольд, О топологических свойствах лагранжевых проекций и симплектической геометрии каустик. Арнольд – Селекта-60, Фазис, 1997; 525–532.

2. V. A. Vassiliev, “A topological proof of the Arnold four cusps theorem”, Bull. London Math. Soc., 44:4 (2012), 637–641

\http://www.pdmi.ras.ru/~arnsem/papers/fourverta.pdf

4 Тополгия пространств функций, не имеющих многократных касательных к графику

Тема рекомендована студентам 2–4 курсов.

Обозначим через Φ пространство бесконечно дифференцируемых функций $[-1,1] \to \mathbb{R}^1$. Функция $f \in \Phi$ называется k-самокасательной (где $k \geq 3$), если найдется отрезок в $[-1,1] \times \mathbb{R}^1$, касающийся графика этой функции в k или больше точках с учетом кратностей. Что можно сказать про топологические свойства множества не k-самокасательных функций при различных k? Возможны многомерные обобщения.

Литература:

В. И. Арнольд, В. А. Васильев, В. В. Горюнов, О. В. Ляшко, “Особенности. I. Локальная и глобальная теория”, Динамические системы – 6, ВИНИТИ, М., 1988, 5–250, глава 4. http://www.mathnet.ru/links/

5 Топология пространств функций, не лежащих на самопересечении дискриминанта

Тема рекомендована студентам 2–4 курсов.

Обозначим через Ψ пространство бесконечно дифференцируемых функций $[-1,1] \to \mathbb{R}^1$. Функция $f \in \Psi$ называется k-дискриминантной (где $k \geq 2$), если найдется отрезок в $[-1,1] \times \mathbb{R}^1$, касающийся графика этой функции в k или больше точках с учетом кратностей. Что можно сказать про топологические свойства множества не k-дискриминантных функций при различных k? Возможны многомерные обобщения.

Литература:

В. И. Арнольд, В. А. Васильев, В. В. Горюнов, О. В. Ляшко, “Особенности. I. Локальная и глобальная теория”, Динамические системы – 6, ВИНИТИ, М., 1988, 5–250, глава 4. http://www.mathnet.ru/links/

6 Асимптотика функций отсекаемого объема вблизи нетипичных плоскостей

Тема рекомендована студентам 2–4 курсов и магистрантам.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с бесконечно гладкой границей. Функция объема — это (двузначная) функция на множестве гиперплоскостей в $\mathbb{R}^N$, сопоставляющая каждой плоскости объем, отсекаемый этой плоскостью от области D. Эта функция регулярна вблизи гиперплоскостей, не касательных к ∂D. Вблизи плоскостей, имеющих с ∂D простое касание, она совпадает либо с регулярной функцией, либо имеет особенность типа $\sqrt{t}$.

Задача — изучить поведение этой функции вблизи гиперплоскостей, касающихся ∂D в параболических точках.

Литература:

1. V. I. Arnol'd, V. A. Vasil'ev, “Newton's Principia read 300 years later”, Notices Amer. Math. Soc., 36:9 (1989), 1148–1154

http://www.currentscience.ac.in/Downloads/article_id_061_02_0089_0095_0.pdf

2. V.A.Vassiliev, Lacunas and local algebraicity of volume functions, 2018, 11 pp., To appear in Journal of Singularities, arXiv:1803.07829

3. Varchenko.

7 Кратности бифуркационных множеств деформаций особых точек голоморфных функций

Тема рекомендована студентам 2–4 курсов и магистрантам.

Продолжить деятельность [1], [2] на особенности, более сложные чем Фамовские. В частности, выразить или оценить эти показатели в терминах диаграмм Ньютона особенностей.

В. А. Васильев, "Кратности множеств Максвелла особенностей Фама", Функц. анализ и его прил., 50:3 (2016), 73–76

V. A. Vassiliev, "Multiplicities of bifurcation sets of Pham singularities", Mosc. Math. J., 17:4 (2017), 825–836 , arXiv: 1701.03909

8 Подкрученные циклы конфигурационных пространств

Тема рекомендована студентам 4 курса и магистрантам.

Я недавно подсчитал (неконструктивными методами) гомологии конфигурационных пространств проективных пространств с коэффициентами в одной полезной локальной системе, см. [1].

Хочется реализовать их явными циклами.

Литература:

Victor A.Vassiliev, Twisted homology of configuration spaces, homology of spaces of equivariant maps, and stable homology of spaces of non-resultant systems of real homogeneous polynomials, 2018 (to appear) , 15 pp., arXiv: 1809.05632