

Смирнов Евгений Юрьевич

esmirnov@hse.ru

1 Группы фризов и кристаллографические группы

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Кристаллографическая группа — это дискретная подгруппа в группе движений евклидова пространства. Кристаллографические группы плоскости можно представлять себе как группы симметрий орнаментов (поищите в интернете по словам *wallpaper groups*, там будет много красивых картинок). В конце XIX века было доказано, что таких групп всего 17. Предлагается разобрать эту классификацию.

У этой задачи есть «детская» версия: можно ограничиться симметриями не плоскости, а бесконечной полосы. В таком случае получится 7 групп, известных как группы фризов, или бордюров (*frieze groups*).

2 Представления колчанов и функтор отражений

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Колчаном в теории представлений называется ориентированный граф (возможно, с петлями и кратными ребрами). Его представление — это способ сопоставить каждой вершине колчана векторное пространство, а каждому ребру — отображение между соответствующими векторными пространствами.

Изучение представлений колчанов дает единообразный подход к задачам линейной алгебры о классификации линейных отображений, линейных операторов, наборов из нескольких подпространств в пространстве и др. Предлагается разобраться с основными понятиями теории представлений колчанов, в частности, с теоремой Габриэля о колчанах конечного типа (т.е. таких, у которых число представлений каждой размерности конечно) — оказывается, что такие колчаны получаются при помощи расстановки стрелок на графах типа ADE.

Можно пойти дальше и изучить принадлежащую Бернштейну, Гельфанду и Пономареву конструкцию функтора отражений, которая объясняет, почему ответ в предыдущей задаче не зависит от того, как ориентированы стрелки колчана.

Литература: И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, “Функторы Кокстера и теорема Габриэля”, УМН, 28:2(170) (1973), 19–33.