Тихомиров Александр Сергеевич

astikhomirov@mail.ru, atikhomirov@hse.ru

1 Замыкания Понселе и пространство коник на проективной плоскости

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Две гладкие коники X и Y на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ называются находящимися в замыкании Понселе, если X вписана в треугольник, вписанный в конику Y. Рассмотрим пространство $\mathbb{P}^5$ всех коник плоскости. Темой предлагаемой курсовой работы является решение одной или нескольких из следующих задач. Первой задачей является проверка следующего факта: замыкание в $\mathbb{P}^5$ множества всех коник, находящихся в замыкании Понселе с данной коникой X, является гиперквадрикой Q_X в $\mathbb{P}^5$. Следующей задачей является описание гиперквадрики Q_X в терминах гиперкубики Δ вырожденных коник в $\mathbb{P}^2$. А именно, пусть гиперквадрика $P_X^{(1)}(\Delta)$ и гиперплоскость $P_X^{(2)}(\Delta)$ - соответственно первая и вторая поляры точки $\{X\}$ относительно гиперкубики Δ. Интерес представляет следующая гипотеза: Q_X есть образ гиперквадрики $P_X^{(1)}(\Delta)$ при некоторой гомологии с центром $\{X\}$ и неподвижной гиперплоскостью $P_X^{(2)}(\Delta)$. Наконец, отдельной интересной задачей является определение коэффициента этой гомологии.

2 Геометрия ассоциированных пятерок прямых в проективном пространстве $\mathbb{P}^4$

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

С каждой четверкой проективных прямых a, b, c, d общего положения в проективном пространстве $\mathbb{P}^4$ связано следующее наблюдение: всякая проективная плоскость в $\mathbb{P}^4$, пересекающая эти прямые, пересекает еще одну прямую e, называемую ассоциированной с прямыми a, b, c, d. Первое свойство, которым обладает эта пятерка прямых, состоит в том, что в ней все пять прямых равноправны, то есть каждая из них ассоциирована с остальными четырьмя. Вторым интересным вопросом является вопрос явного построения прямой e по прямым a, b, c, d. Наконец, представляет непосредственный интерес получение явной геометрической интерпретации ассоциированных пятерок прямых как пятерок точек на грассманиане $G(2,5)$ в терминах плюккерова вложения этого грассманиана в проективное пространство $\mathbb{P}^9$. Получение ответов на эти вопросы и составляет содержание настоящей курсовой работы.

3 Конструкция Штейнера кубической рациональной кривой в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Рациональная кубическая кривая X в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ параметрически задается уравнениями $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (1 : t : t^2 : t^3)$, где t - параметр. В этом отношении она подобна конике C на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, задаваемой параметрическими уравнениями $(x_0 : x_1 : x_2) = (1 : t : t^2)$. Как известно, конику C можно получить по конструкции Штейнера как множество точек пересечения соответственных прямых двух пучков прямых в $\mathbb{P}^2$, между которыми установлено проективное соответствие. При этом центры O_1 и O_2 этих пучков лежат н конике C. Поступая по аналогии, можно выбрать три пучка плоскостей в пространстве $\mathbb{P}^3$ так, чтобы вершины этих пучков - прямые l_1, l_2 l_3 имели специальное расположение по отношению к кубике X, установить между этими пучками проективное соответствие, зная X, и получить кубику X как множество точек пересечения троек соответственных плоскостей этих пучков. Построению этого обобщения конструкции Штейнера на случай рациональных кубических кривых посвящена предлагаемая курсовая работа. Как следствие этой конструкции, в работе прредполагается выяснить ряд других интересных свойств кубики X и связанных с ней объектов, таких как семейство соприкасающихся плоскостей к X, семейство квадрик, проходящих через X, и других геометрических объектов.

4 Геометрия кубической нормповерхности в проективном пространстве $\mathbb{P}^4$

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Кубическая рациональная поверхность S в проективном пространстве $\mathbb{P}^4$ получается как линейчатая поверхность, образующими которой являются проективные прямые, соединяющие соответственные точки в проективном соответствии между фиксированными проективной прямой l и гладкой коникой C, такими, что проективная оболочка l и C есть все пространство $\mathbb{P}^4$. С этой поверхностью связаны семейство Π плоскостей в $\mathbb{P}^4$, пересекающих S по коникам, а также семейство касательных проективных плоскостей к S. Целью настоящей курсовой работы является описание свойств этих семейств и связанных с ними геометрических конструкций в пространстве $\mathbb{P}^4$.

5 Аналоги расслоений Хопфа для классических компактных групп

Тема рекомендована студентам 1–2 курсов.

Расслоение Хопфа - это такое отображение $f : S^3 \to S^2$ трехмерной сферы S^3 на двумерную сферу S^2 со слоем окружность S^1, которое получается как композиция стандартного вложения сферы S^3 в пространство $\mathbb{C}^2$ как подмногообразия $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ и естественной проекции $\mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{CP}^1 \approx S^2$. Это расслоение можно реализовать как фактор по действию на специальной унитарной группе $SU(2) \cong S^3$ ее абелевой подгруппы S^1, то есть $S^2 \cong SU(2)/S^1$. В геометрии и топологии многообразий важную роль играют аналоги расслоения Хопфа для других классических компактных групп, такие как расслоения $S^{n-1} \cong O(n)/O(n-1) \cong SO(n)/SO(n-1)$, $S^{2n-1} \cong U(n)/U(n-1) \cong SU(n)/SU(n-1)$, $S^{4n-1} \cong Sp(n)/Sp(n-1)$, $n \geq 2$ и другие. Целью настоящей курсовой работы является точное описание этих расслоений как отображений гладких многообразий и одновременно как главных расслоенных пространств, нахождение слоев этих расслоений и другие связанные с этим вопросы.

6 Связки коник и сизигические пучки плоских эллиптических кубик

Тема рекомендована студентам 2–3 курсов.

Как известно, гессиан связки N коник на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ есть в общем случае кубическая кривая H_N в $\mathbb{P}^2$. Обозначим через $N(X)$ связку полярных коник для гладкой плоской кубической кривой X. Как показал Л.Кремона, кубика X и ее гессиан $H = H_{N(X)}$ принадлежат пучку P кубик, проходящих через 9 точек перегиба кривой X и одновременно кубики H. Этот пучок называется пучком сизигических кубик. Как следует из алгебро-геометрического описания связок коник, имеются три различные связки коник N_1, N_2 и N_3 (включая связку $N_1 = N(X)$), для которых H является гессианом. С другой стороны, из свойств пучка P сизигических кубик можно получить, в этом пучке имеются три гладкие кубики X_1, X_2, X_3 (включая $X_1 = X$), для которых H является гессианом. Целью настоящей курсовой работы является проверка этого факта, то есть утверждения о том, что $N_i = N(X_i)$ для $i = 1, 2, 3$ а также получение алгебро-геометрического описания данных, позволяющих по гессиану H построить все три связки коник N_1, N_2, N_3.

7 Геометрия трехмерной проективной квадрики

Тема рассчитана на студентов 2–3 курсов

Гладкая трехмерная квадрика Q в проективном пространстве $\mathbb{P}^4$ обладает замечательной геометрией. В частности, база семейства проективных прямых на Q оказывается изоморфной проективному пространству $\mathbb{P}^3 = P(V)$, $\dim V = 4$. Более того, вложение Q в $\mathbb{P}^4$ определяет в базе $\mathbb{P}^3$ семейства проективных прямых на Q нуль-корреляцию, то есть проективный изоморфизм $f : \mathbb{P}^3 \xrightarrow{\simeq} (\mathbb{P}^3)^\vee$, индуцированный симплектическим изоморфизмом $\tilde{f} : V \xrightarrow{\simeq} V^\vee$. Этой нуль-корреляции соответствует реализация квадрики Q как гиперплоского сечения грассманиана $G(2, V)$, вложенного в пространство $P(\wedge^2 V) \simeq \mathbb{P}^5$ по Плюккеру как гиперквадрика. Эти и другие конструкции предполагается разобрать в курсовой работе.

8 Геометрическая конструкция рациональности симметрических степеней рациональных алгебраических многообразий

Тема рассчитана на студентов 2–3 курсов

Вопрос о нахождении чисто геометрического доказательства рациональности произвольной симметрической степени рационального проективного многообразия представляет несомненный интерес в геометрии проективных алгебраических многообразий. Одним из подходов к решению этой проблемы является использование классических рациональных проективных многообразий - так называемых норммногообразий. Целью настоящей курсовой работы является установление ряда свойств норммногообразий, вытекающих из их описания как проективизированных векторных расслоений над $\mathbb{P}^1$, и затем использование этих свойств для получения геометрической конструкции, решающей вышеуказанную проблему рациональности симметрических степеней произвольных рациональных многообразий.

9 Пространство твисторов для четырехмерной сферы

Тема рассчитана на студентов 3–4 курсов и магистрантов

Пространство твисторов для четырехмерной сферы S^4 с круговой метрикой g определяется как пространство, параметризующее комплексные структуры в слоях касательного расслоения T_{S^4}, согласованные с метрикой g. Оказывается, это пространство является комплексным многообразием, изоморфным проективному пространству $\mathbb{CP}^3$. Это пространство играет важнейшую роль в дифференциальной геометрии и калибровочной теории, в частности, в описании пространств модулей инстантонов на сфере S^4. По своей конструкции твисторное пространство обладает гладкой проекцией $\pi : \mathbb{CP}^3 \to S^4$. Существует красивый способ описания этой проекции через задание антиголоморфной (кватернионной) инволюции $\tau : \mathbb{CP}^3 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{CP}^3$. В курсовой работе предполагается описать геометрическую конструкцию в терминах проективной геометрии пространства $\mathbb{CP}^3$, снабженного инволюцией τ, позволяющую интерпретировать точки твисторного пространства как комплексные структуры в касательных пространствах подлежащих точек на сфере S^4.
Отдельный интерес представляет получение чисто геометрического описания пространства твисторов в терминах стандартного вложения сферы S^4 в евклидово пространство $\mathbb{R}^5$.

10 Геометрия семейств максимальных линейных подпространств на грассманианах

Тема рассчитана на студентов 3–4 курсов и магистрантов

Линейные подпространства на грассманианах играют важную роль в различных вопросах алгебраической геометрии, в частности, при описании различных типов векторных расслоений на грассманианах (например, однородных, равномерных, линейно-тривиальных расслоений). При этом оказывается важным описание семейств максимальных линейных подпространств на грассманианах В курсовой работе предполагается получить такое описание многообразий, параметризующих максимальные линейные подпространства на грассманианах, в терминах флаговых многообразий и диаграмм инциденции.

11 Геометрия семейств максимальных линейных подпространств на ортогональных грассманианах

Тема рассчитана на студентов 3–4 курсов и магистрантов

Ортогональный грассманиан определяется как многообразие, параметризующее подпространства векторного пространства, снабженного невырожденной квадратичной формой, изотропные относительно этой квадратичной формы. На ортогональном грассманиане, как и на обычном грассманиане, имеются линейные подпространства. В курсовой работе предполагается дать описание многообразий, параметризующих максимальные линейные подпространства на ортогональных грассманианах, в терминах диаграмм инциденции.

12 Геометрия семейств максимальных линейных подпространств на симплектических грассманианах

Тема рассчитана на студентов 3–4 курсов и магистрантов

Симплектический грассманиан определяется как многообразие, параметризующее подпространства четномерного векторного пространства, снабженного невырожденной йсимплектическо формой, изотропные относительно этой симплектической формы. На симплектическом грассманиане, как и на обычном и ортогональном грассманианах, имеются линейные подпространства. В курсовой работе предполагается дать описание многообразий, параметризующих максимальные линейные подпространства на симплектических грассманианах, в терминах диаграмм инциденции.

13 Инстантоны на сфере S^4 и кватернионы

Тема рассчитана на студентов 3–4 курсов и магистрантов

Для сферы S^4 с круговой метрикой g рассмотрим g-антиавтодуальные связности на $SU(2)$-расслоении с фиксированным классом Понтрягина (зарядом) $q \geq 1$ над S^4, называемые также инстантонами с зарядом q. Существуют точные формулы, использующие кватернионы, позволяющие получить инстантоны из произвольного класса калибровочной эквивалентности, а тем самым, описать пространство $I(q)$ модулей инстантонов с данным зарядом в терминах кватернионов. В курсовой работе преполагается использование этих формул для описания геометрии пространств $I(q)$ с малыми значениями заряда q. Особенно интересны случаи $q = 1$ и 2.

14 Стабильные векторные расслоения на пространстве $\mathbb{CP}^3$ и инстантоны

Тема рассчитана на студентов 3–4 курсов и магистрантов

Конструкция Атьи-Уорда через твисторную проекцию $\pi : \mathbb{P}^3 \to S^4$ устанавливает связь между инстантонами на сфере S^4 и стабильными векторными расслоения ранга 2 на $\mathbb{P}^3$. Используя эту конструкцию, в курсовой работе предполагается получить описание пространства модулей инстантонов с малым зарядом на S^4 как компоненты множества неподвижных точек вещественной инволюции на пространстве модулей стабильных векторных расслоений с тривиальным детерминантом и вторым классом Черна, равным заряду инстантонов.

15 Связь между инстантонами на сфере S^4 и стабильными векторными расслоениями на $\mathbb{P}^2$

Тема рассчитана на студентов 3–4 курсов и магистрантов

Пространство модулей $\widetilde{I(n)}$ оснащенных инстантонов с зарядом n на сфере S^4 представляет главное $SO(3)$-расслоение над пространством модулей $I(n)$ инстантонов на S^4. Соответственно, пространство $\widetilde{M(n)}$ модулей оснащенных стабильных векторных расслоений на $\mathbb{P}^2$ с классами Черна $c_1 = 0, c_2 = n$ (где оснащение есть выбор базиса в пространстве сечений тривиального ограничения расслоения на фиксированную прямую) является главным $PGL(2, \mathbb{C})$-расслоением над пространством $M(n)$ модулей стабильных векторных расслоений на $\mathbb{P}^2$. В 1984 г. С.Дональдсон, используя конструкцию Атьи-Уорда, установил изоморфизм $\widetilde{I(n)}$ и $\widetilde{M(n)}$ как вещественных аналитических многообразий. Тем самым, из неприводимости и гладкости пространства $M(n)$ как комплексного многообразия вытекает гладкость и связность пространства $I(n)$ как вещественно-аналитического многообразия. В курсовой работе предполагается получение интерпретации изоморфизма между $\widetilde{I(n)}$ и $\widetilde{M(n)}$ в терминах соответствующего отображения моментов.