Листок 2.3

Абстрактная теория меры

срок сдачи 14 декабря

Задача 1. Докажите эквивалентность двух определений носителя меры: «максимальное замкнутое подмножество такое, что окрестность любой его точки имеет положительную меру» и «минимальное замкнутое множество полной меры».

Задача 2. Докажите, что носитель произведения мер равен произведению носителей.

Задача 3. Пусть $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — монотонно возрастающая кусочно-постоянная функция со скачками $v_j = f(a_j+0) - f(a_j-0)$. Пусть μ — мера Стилтьеса с производящей функцией f. Докажите, что любая функция $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ является μ-измеримой и найдите ее интеграл Лебега-Стилтьеса $\int_0^1 \varphi\, d\mu$.

Задача 4. Пусть $K(x)$ — канторова лестница. Докажите, что носитель меры Стилтьеса с производящей функцией K — канторово совершенное множество.

Задача 5. Пусть μ, ν — меры на единичном отрезке, $\mu \times \nu$ — мера на квадрате, являющаяся их произведением. Тогда верны следующие утверждения:
а) если μ и ν абсолютно непрерывны, то и $\mu \times \nu$ абсолютно непрерывна;
б) если μ и ν дискретны, то и $\mu \times \nu$ дискретна;
в) если μ абсолютно непрерывна, а ν дискретна, то $\mu \times \nu$ сингулярна;
г) если хотя бы одна из мер μ и ν сингулярна, то и $\mu \times \nu$ сингулярна.
(Здесь абсолютная непрерывность, сингулярность и дискретность понимаются относительно меры Лебега на отрезке либо квадрате.)

Задача 6. Докажите, что график измеримой функции одного переменного имеет нулевую двумерную меру Лебега.

Задача 7. Докажите, что график липшицевой функции одного переменного имеет хаусдорфову меру 1.

Задача 8 (Теорема Рисса).* Докажите, что каждый положительный (неотрицательный на неотрицательных функциях) линейный непрерывный функционал Φ на нормированном пространстве $C([0,1])$ задается некоторой мерой μ по правилу

$$\Phi(f) = \int_0^1 f\, d\mu.$$

Указание: определите μ на элементарных множествах и воспользуйтесь теоремой о продолжении меры.

Задача 9.* Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Назовем меру на E *вероятностной*, если $\mu(E) = 1$. Докажите, что пространство вероятностных мер на E *слабо компактно*: из любой последовательности μ_n можно выбрать *слабо сходящуюся* подпоследовательность μ_{n_k}

$$\forall\, f \in C(E),\ \int_E f\, d\mu_{n_k} \to \int_E f\, d\mu.$$

Указание: воспользуйтесь теоремой Рисса и *сепарабельностью* пространства $C(E)$ — наличием счетного всюду плотного множества.