Задачи по группам и алгебрам Ли
листок 4, 19.11.2018

Для получения оценки 10 по данному листку необходимо сдать 80% пунктов задач (остальные оценки высчитываются пропорционально). Дедлайн 11 декабря. Задачи, сданные после дедлайна, стоят на 25% меньше. Итоговая оценка вычисляется по формуле 0.6 средней оценки за листки и контрольную + 0.4 оценки за экзаменационную работу.

1. Пусть G — связная группа Ли, $T : G \to GL(V)$ — ее неприводимое представление в конечномерном пространстве V. Докажите, что соответствующее представление в V алгебры Ли группы G также неприводимо.

2. Опишите неприводимые представления группы $SO(3)$.

3. Рассмотрим алгебру Ли с базисом X, Y, Z и скобкой $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = [Y, Z] = 0$ (трехмерная алгебра Гейзенберга). Докажите, что все ее неприводимые представления одномерны. Указание: если A и B — операторы в конечномерном векторном пространстве, то след оператора $AB - BA$ равен нулю.

4. Докажите, что группа $SU(2)$ как многообразие есть сфера S^3 и что при отождествлении $SU(2) = S^3$ мера Хаара совпадает с естественной мерой на сфере.

5. Вычислите левоинвариантную меру Хаара на группе $GL(N, \mathbb{C})$. Является ли эта группа унимодулярной?

Модулярная функция $\Delta(g)$ на группе Ли G определяется из условия

$$\int_G f(xg^{-1})\mu_L(dx) = \Delta(g) \int_G f(x)\mu_L(dx),$$

где μ_L — левоинвариантная мера Хаара.

6. Вычислите функцию $\Delta(g)$ для группы матриц вида $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, где a и b — комплексные числа, $a \neq 0$.

7. Докажите, что группа вещественных верхнетреугольных матриц размера $N \times N$ с единицами на диагонали унимодулярна.

8. Группа $G = SL(2, \mathbb{R})$ действует на верхней полуплоскости $H_+ := \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im} z > 0\}$ дробно-линейными преобразованиями

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Докажите, что на H_+ существует G-инвариантная мера (она определена с точностью до постоянного множителя). Вычислите эту меру.

9. Та же задача для действия группы $SU(1, 1)$ дробно-линейными преобразованиями на единичном круге $|z| < 1$. (Группа $SU(1, 1)$ состоит из комплексных матриц размера 2×2, с определителем 1 и сохраняющих индефинитную эрмитову форму $|z_1|^2 - |z_2|^2$ в $\mathbb{C}^2$.)

Замечание. В задачах 8 и 9 речь идет о двух моделях плоскости Лобачевского и соответственно о двух реализациях группы движений плоскости Лобачевского.