Листок 4

Некоторые обозначения:
$O(n)$ – группа ортогональных преобразований евклидова векторного пространства E^n;
$G(n)$ (или просто G) – группа движений E^n, рассматриваемого как аффинное евклидово пространство (его точки – это векторы из E^n).
Любое движение $g \in G$ действует в аффинном пространстве E^n по формуле $g(x) = Ax + t$, $x \in E^n$, $A \in O(n)$, а вектор t лежит в векторном пространстве E^n.
Оператор A называется линейной частью движения g.
Через $o(g)$ будет обозначаться порядок элемента g из группы G.
Если $A \in O(n)$, то через $P(A)$ обозначим ортогональный проектор на подпространство $E(A) = \mathrm{Ker}(A - E)$.
Определим коммутатор двух элементов A, B в группе: $[AB] = ABA^{-1}B^{-1}$.
Для $T \in O(n)$ положим $\mathrm{rot}T = \max\limits_{x\neq 0}\|(T-E)(x)\|/\|x\|$

Задачи

Задача 1. Докажите, что

а) $P(A) = f(A)$ для некоторого многочлена $f(x)$;
б) если $o(A) = m$, то $f = 1/m(1 + x + x^2 + \ldots + x^{(m-1)})$.

Задача 2. Пусть $g = (A, t) \in G$. Докажите, что $o(g) = m \Leftrightarrow o(A) = m, P(A)(t) = 0$.

Задача 3. Докажите, что два элемента $g_1 = (A_1, t_1)$, $g_2 = (A_2, t_2) \in G$ тогда и только тогда сопряжены в группе G, когда существует такое ортогональное преобразование $S \in O(n)$, что $S^{-1}A_1S = A_2,\ S(t_2) - t_1 \in E(A_1)^{\perp}$. В частности, если порядки этих элементов конечны, то для их сопряженности в группе G необходимо и достаточно, чтобы их линейные части были сопряжены в группе $O(n)$.

Задача 4. Дано: $A, B \in O(n)$. Докажите, что $\mathrm{rot}[A, B] \leqslant 2\mathrm{rot}A\mathrm{rot}B$.

Задача 5. Дано: подгруппа $\Gamma \in G(2)$ действует дискретно в E^2. Это означает, что орбита $\Gamma(x)$ любой точки $x \in E^2$ не имеет точек накопления (каждая точка орбиты учитывается столько раз, каков порядок ее стабилизатора в группе Γ). Известно, что порядок любого элемента из группы Γ конечен. Может ли при этом группа Γ оказаться бесконечной?

Задача 6. Аффинное преобразование $S(k)$ аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ над полем $\mathbb{F}$ называется подобием с коэффициентом $k \in \mathbb{F}^*$, если вектор $O(M_1)O(M_2)$ равен вектору kM_1M_2 для любых точек $M_1, M_2 \in \mathbb{A}^n$. Докажите, что:
а) подобия образуют подгруппу в группе аффинных преобразований;
б) если коэффициент подобия не равен единице, то подобие имеет единственную неподвижную точку в $\mathbb{A}^n$.

Задача 7. Можно ли на вещественной аффинной плоскости с помощью линейки построить неподвижную точку композиции трех подобий с попарно различными неподвижными точками O_1, O_2, O_3 и коэффициентами подобия $k_1,\ k_2,\ k_3$ такими, что $k_1k_2k_3 \neq 1$?

Задача 8. На сторонах AB и AC угла BAC откладываются отрезки AK и AL, сумма длин которых равна 10. Докажите, что все прямые KL касаются одной параболы.

Задача 9. В точках K, L, лежащих на параболе, проведены касательные к параболе, касательные пересекаются в точке M. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков MK, ML, касается той же параболы.

Задача 10. На евклидовой плоскости выбран ортонормированный репер и нарисована решетка точек $\mathbb{Z}^2$ с целыми координатами. Пусть E - эллипс с центром в точке $(0, 0)$. Известно,что его площадь $\mathrm{Area}(E) \geqslant 2\pi/\sqrt{3}$. Докажите, что эллипс E содержит ненулевую точку решетки $\mathbb{Z}^2$.