Лекция 9 - 18. Общая теория меры

1 Мера Лебега на прямой

2 Что такое мера?

Напомним основные свойство меры Лебега. Эта мера - неотрицательная функция на алгебре множеств, называемых измеримыми, обладающая следующими свойствами:

1. Счетная аддитивность
2. Трансляционная инвариантность
3. Нормировка
4. Принцип непрерывности.

Подробные формулировки даны в лекции 1.

Эти свойства задают класс $\mathcal{L}$ измеримых множеств и меру Лебега на нем однозначно.

Отметим, что принцип непрерывности следует из счетной аддитивности. Если отказаться от трансляционной инвариантности и нормировки, а оставить только требование счетной аддитивности - мы получим необозримое разнообразие мер.

3 Что же такое мера?

Определение 1 *Рассмотрим произвольное множество E и σ-алгебру $\mathcal{B}$ подмножеств E. Мера на E - это неотрицательная функция $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$, обладающая свойством счетной аддитивности:*

$$\mu(\sqcup(X_j \in \mathcal{B})) = \Sigma\mu(X_j).$$

Примеры 1 *1. Мера Лебега*

2. δ-мера. Существует точка $a \in E$:

$$\mu(X) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in X \\ 0, & \text{если } a \notin X. \end{cases}$$

3. *Мера с плотностью. Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ - неотрицательная измеримая функция, $X \in \mathcal{L}$. Тогда*

$$\mu(X) = \int_X f d\mu_{Leb}$$

Задача 1 *Докажите принцип непрерывности для произвольной меры, исходя только из свойства счетной аддитивности.*

Задача 2 *Докажите σ-аддитивность меры с плотностью.*

4 Общая теорема о продолжении меры.

Рассмотрим произвольное пространство E. Рассмотрим класс $\mathcal{E}$ подмножеств множества E, называемых элементарными. Пусть этот класс – конечная σ-алгебра, содержащая E, называемая также кольцом с единицей. Пусть на $\mathcal{E}$ определена мера m, обладающая следующими свойствами:

$$m(\sqcup_1^N A_n) = \Sigma m(A_n), \tag{1}$$

$$m(A \subset \cup A_n) \leq \Sigma m(A_n). \tag{2}$$

Свойство(2) называется полуаддитивностью.

Определение 2 *Внешняя мера $\mu^*(X)$ определяется так:*

$$\mu^*(X) = \inf_{\cup A_n \supset X, A_n \in \varepsilon} \Sigma m(A_n).$$

Определение 3 *Множество измеримо, если $\forall \varepsilon \exists A \in \varepsilon : \mu^*(X \triangle A) < \varepsilon$. Положим:*

$$\mu(X) = \mu^*(X) \tag{3}$$

Теорема 1 *(о продолжении меры) Пусть ε –конечная σ-алгебра и m – мера на ней, обладающая свойствами* (1) *и* (2)*. Тогда определение 3 задает σ-аддитивную меру на множестве всех измеримых множеств.*

Резюме в лекции 3 показывает, что эта теорема уже доказана на лекциях 2 и 3 для любой алгебры элементарных множеств с опредеделной на ней длиной, удовлетворяющей свойству полуаддитивности на алгебре $\mathcal{E}_\sigma$ и требованию

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

Последнее требование немедленно следует из формулы (1). Это доказывает общую теорему о продолжении меры.

5 Производящая функция меры.

Пусть μ - мера на отрезке $[0, 1]$, заданная на σ-алгебре $\mathcal{L}$ множеств, измеримых по Лебегу.

Определение 4 *Производящей функцией меры μ называется функция*

$$F_\mu : x \mapsto \mu([0, x]).$$

Задача 3 *Докажите, что производная функция меры полунепрерывна справа:*

$$F_\mu(x_n) \searrow F_\mu(x) \text{ при } x_n \searrow x.$$

Задача 4 *a).Докажите, что точкам разрыва производящей функции F_μ соответствуют атомы (точки положительной меры) меры μ.*

b). Докажите обратное утверждение.

Задача 5 *Докажите, что*

$$\mu((a, b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a);$$

$$\mu([a, b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a - 0);$$

выведите формулы для $\mu([a, b))$ и $\mu((a, b))$. Здесь $F(a - 0)$ - предел слева функции F в точке a:

$$F(a - 0) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} F(a - \varepsilon).$$

6 Мера Стилтьеса.

Рассмотрим произвольную монотонную возрастающую функцию F, полунепрерывную справа. Рассмотрим тот же класс $\mathcal{E}$ элементарных множеств, что и для меры Лебега. Определим длину промежутка σ, как в задаче 5 и положим:

$$m(\sqcup_1^N \sigma_j) = \sum_1^N m(\sigma_j). \tag{4}$$

Задача 6 *Проверьте условия (1), (2) для длины, определенной в задаче 5.*

Теорема 2 *Длина (4) с класса элементарных множеств продолжается на σ-алгебру множеств, содержащую все борелевские множества.*

7 Примеры.

A. $f = \chi_{(0,1]},\ m(0) = 1,\ m_{(0,1]} = 0\ \mu = \delta(0)$.

Мера Стилтьеса определяется с помощью теоремы о продолжении меры. Интеграл Лебега по любой мере определяется так же, как и по мере Лебега. Интеграл Лебега по мере Стилтьеса называется интегралом Лебега - Стилтьеса.

Пусть f – непрерывная функция. Тогда

$$\int_0^1 f d\delta(0) = f(0).$$

B. Пусть f – функция Кантора.

Определение 5 *Носитель меры – это минимальное замкнутое множество, дополнение к которому имеет меру* 0.

Носитель меры Стилтьеса, соответствующей функции Кантора – это канторово совершенное множество.

C. Пусть $F \in C^1(E),\ F' \geq 0$. Тогда

$$\mu_F(X) = \int_X F'(x)dx.$$